Sada příkladů na 8. týden

Co budeme potřebovat z teorie

Věta (výpočet poloměru konvergence). *Pro mocninnou řadu* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *je poloměr konvergence roven*

$$\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Poloměr konvergence je zároveň roven $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$, *pokud tato limita existuje.*

Je-li $\rho > 0$ *poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, *potom platí:*

- *pokud* $|z_0 - z| < \rho$ *potom (číselná) řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *konverguje absolutně,*
- *pokud* $|z_0 - z| > \rho$, *potom řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *diverguje.*

Věta (derivace mocninné řady). *Má-li mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *poloměr konvergence* $\rho > 0$, *má stejný poloměr konvergence i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}$. *Označíme-li* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in U(z_0, \rho)$, *potom*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(z-z_0)^{n-1}.$$

Věta (integrace mocninné řady). *Má-li mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *poloměr konvergence* $\rho > 0$, *má stejný poloměr konvergence i řada* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$. *Označíme-li* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}$ *a* $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, $z \in U(z_0, \rho)$, *potom* $f(z) \stackrel{c}{=} \int g(z)$.

Věta (Abelova)**.** *Má-li mocninná řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n =: f(z)$ *poloměr konvergence* $\infty > \rho > 0$*, potom:*

- *pokud řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ *konverguje, potom*

$$\lim_{z \to \rho-} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$$

- *pokud řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\rho)^n$ *konverguje, potom*

$$\lim_{z \to -\rho+} f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-\rho)^n$$

Příklady

1. Spočtěte poloměr konvergence a vyšetěte konvergenci na kruhu konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-3)^n}{n5^n}$.
2. Spočtěte poloměr konvergence a vyšetěte konvergenci na kruhu konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} z^n$, $a \in \mathbb{R}^+$.
3. Spočtěte poloměr konvergence a vyšetěte konvergenci na kruhu konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{n} z^n$.
4. Spočtěte poloměr konvergence a vyšetěte konvergenci na kruhu konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} (z-1)^n$.
5. Sečtěte mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} n z^n$.
6. Sečtěte mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$.
7. Sečtěte mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) z^n$.
8. Sečtěte číselonou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$.
9. Sečtěte číselonou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n!}$.
10. Sečtěte číselonou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}$.
11. Sečtěte číselonou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$.
12. Sečtěte číselonou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2n+1)!}$.