Sada příkladů na Taylorovy polynomy

1. Spočtěte Taylorův polynom funkce $f(x) = \sqrt{x}$ stupně 3 v bodě 1.
2. Spočtěte Taylorův polynom funkce $f(x) = \mathrm{e}^{\sin x}$ stupně 5 v bodě 0.
3. Spočtěte Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(\sin x)$ stupně 6 v bodě 0.
4. Spočtěte Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(\sin(\sin(\sin(x))))$ stupně 3 v bodě 0.
5. Pomocí Taylorova rozvoje spočtěte e s chybou maximálně 10^{-4}.
6. Pomocí Taylorova rozvoje spočtěte $\sin(1)$ s chybou maximálně 10^{-5}.
7. Pomocí Taylorova rozvoje spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.
8. Pomocí Taylorova rozvoje spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x \sin x - x(x+1)}{x^3}$.
9. Pomocí Taylorova rozvoje spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - a^{-x} - 2}{x^2}$.
10. Spočtěte Taylorův polynom funkce $f(x) = \arctan(x)$ supně 3 v bodě 0. S jeho pomocí spočtěte limitu $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x - x}{\sin x - x}$.
11. Pomocí Taylorova rozvoje spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - 1 + \frac{1}{2} x \sin x}{\log^4(1+x)}$.
12. Nalezněte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby limita $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - \cos(\sin x)}{x^n}$ byla kladná a různá od nuly.
13. Nalezněte $n \in \mathbb{N}$ tak, aby limita $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\sin x) - \sin(\operatorname{tg} x)}{x^n}$ byla kladná a různá od nuly.

Definice Taylorova polynomu:

Definice (Taylorův polynom)**.** *Nechť f je funkce definovaná na okolí bodu $a \in \mathbb{R}$ a buď $n \in \mathbb{N}$. Nechť existuje $f^{(n)}(a) \in \mathbb{R}$. Potom definujeme polynom*

$$T^f_{a,n}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

a nazýváme ho Taylorův polynom funkce f stupně n se středem v bodě a.

Věty, které budeme používat:

Věta (Peanův tvar zbytku). *Platí*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T^f_{a,n}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Věta (Lagrangeův tvar zbytku). *Nechť f je reálná funkce definovaná na otevřeném intervalu obsahujícím interval $[a, x]$ $(a < x)$. Nechť $f^{(n)}$ existuje a je spojitá na $[a, x]$ a nechť $f^{(n+1)}$ existuje na (a, x). Potom existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že*

$$f(x) - T^f_{a,n}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Výsledky:

1. $1 - \dfrac{x-1}{2} + \dfrac{(x-1)^2}{8} - \dfrac{(x-1)^3}{16}$.
2. $1 + x + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{8} - \dfrac{x^5}{15}$.
3. $x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{10}$.
4. $x - \dfrac{2x^3}{3}$.
5. Stačí Taylorův rozvoj stupně 7 tj. $e \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040}$.
6. Stačí Taylorův rozvoj stupně 8 tj. $\sin(1) \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040}$.
7. Taylorův polynom stupně 4 pro $e^{-\frac{x^2}{2}}$ je $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8}$, limita vyjde $-\frac{1}{12}$.
8. Taylorův polynom stupně 3 pro $e^x \sin x$ je $x + x^2 + \frac{x^3}{3}$, limita vyjde $\frac{1}{3}$.
9. $\log^2 a$.
10. Taylorův polynom stupně 3 pro $\arctan x$ je $x - \frac{x^3}{3}$, limita vyjde 2.
11. $-\frac{1}{24}$
12. Hledané n je 4, Taylorův polynom stupně 4 pro $\cos(\sin x)$ je $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}$, limita vyjde $-\frac{1}{6}$.
13. Hledané n je 7, Taylorův polynom stupně 7 pro $\mathrm{tg}(\sin x)$ je $x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{107x^7}{5040}$, Taylorův polynom stupně 7 pro $\mathrm{tg}(\sin x)$ je $x + \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{40} - \frac{275x^7}{5040}$, limita vyjde $\frac{275}{5040} - \frac{107}{5040} = \frac{1}{30}$.