Sada příkladů na 4. týden

Co bude potřeba z teorie:

Definice (limita a spojitost funkce). *Nechť f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Říkáme, že f je* ***spojitá v bodě*** *a, pokud platí:*

$$(S) \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0; \forall x \in \mathbb{R} : |x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Nechť f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Říkáme, že f ***má v bodě*** *a* ***limitu*** *$L \in \mathbb{R}$ (píšeme $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$), pokud platí:*

$$(L) \qquad \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0; \forall x \in \mathbb{R} : 0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definice (jednostranná limita funkce). *Nechť f je reálná funkce definovaná na nějakém levém, resp. pravém, prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Říkáme, že f má v bodě a jednostranou limitu $L \in \mathbb{R}$ zleva, resp. zprava, (píšeme $\lim\limits_{x\to a_-} f(x) = L$, resp. $\lim\limits_{x\to a_+} f(x) = L$), pokud platí následující*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0; \forall x \in \mathbb{R} : -\delta < x - a < 0 \implies |f(x) - L| < \varepsilon,$$

resp.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0; \forall x \in \mathbb{R} : 0 < x - a < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Fakt. *Pokud $\exists \delta > 0\ \forall x \in P(a,\delta) : f(x) = g(x)$ a $L \in \mathbb{R}$, potom*

$$\left(\lim_{x\to a} f(x) = L\right) \iff \left(\lim_{x\to a} g(x) = L\right).$$

Věta (aritmetika limit). *Je-li $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ a $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, potom:*

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x) + g(x) = A + B$,
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = A \cdot B$,
3. *pokud $B \neq 0$, pak* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$

Příklady:

1. Dokažte z definice $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$.
2. Dokažte z definice a) $\lim\limits_{x\to 1^+} [x] = 1$, b) $\lim\limits_{x\to 1^-} [x] = 0$.

3. Spočtěte (a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

4. Spočtěte $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x^2-2x} - \dfrac{x}{x^2-4}\right)$.

5. Spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{2}{x^2}+1}{\sqrt{\frac{3}{x^4}-\frac{6}{x^2}+5}}$.

6. Spočtěte $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x+x^2+\dots x^n-n}{x-1}$, $n\in\mathbb{N}$.

7. Spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$, $m,n\in\mathbb{N}$.

8. Spočtěte $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{m}{1-x^m} - \dfrac{n}{1-x^n}\right)$, $m,n\in\mathbb{N}$.

9. Spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1-x)}{x}$.

10. Spočtěte $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}}{x}$.

11. Spočtěte $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$.

12. Spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

13. Spočtěte $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.