Sada příkladů na 10. týden

Co budeme potřebovat z teorie

Věta (derivace složeného zobrazení). *Nechť* $F = (F_1, \dots, F_m)$ *je zobrazení z* $\mathbb{R}^d$ *do* $\mathbb{R}^m$ *a* $G = (G_1, \dots, G_k)$ *je zobrazení z* $\mathbb{R}^m$ *do* $\mathbb{R}^k$. *Nechť* $a \in \mathbb{R}^d$ *nechť existují* $F'(a)$ *a* $G'(F(a))$. *Potom* $(G \circ F)'(a)$ *existuje a platí* $(G \circ F)'(a) = G'(F(a)) \cdot F'(a)$.

Věta (o implicitním zobrazení). *Nechť* $G \subset \mathbb{R}^{d+m}$ *je otevřená,* $F : G \to \mathbb{R}^m$, $F \in C^k(G)$ *pro nějaké* $k \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in G \subset \mathbb{R}^{d+m}$. *Předpokládejme, že* $F(a, b) = 0$ *a že platí*

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u_1}(a,b) & \frac{\partial F_1}{\partial u_2}(a,b) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m}(a,b) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u_1}(a,b) & \frac{\partial F_2}{\partial u_2}(a,b) & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial u_m}(a,b) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1}(a,b) & \frac{\partial F_m}{\partial u_2}(a,b) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m}(a,b) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Potom existují $\delta, \Delta > 0$ *taková, že*

- *pro každé* $x \in U(a, \delta)$ *existuje právě jedno* $u \in U(b, \Delta)$ *takové, že* $F(x, u) = 0$,
- *je-li* φ *zobrazení přiřazující bodu* x *bod* u *jako výše, je toto zobrazení* $C^k(U(a, \delta))$.

Zjednodušená verze pro $d = m = 1$:

Věta (o implicitní funkci). *Nechť* $G \subset \mathbb{R}^2$ *je otevřená,* $F : G \to \mathbb{R}$, $F \in C^k(G)$ *pro nějaké* $k \in \mathbb{N}$, $(a, b) \in G \subset \mathbb{R}^2$. *Předpokládejme, že*

- $F(a, b) = 0$,
- $\frac{\partial F}{\partial u}(a, b) \neq 0$.

Potom existují $\delta, \Delta > 0$ *a* C^k *funkce* $\varphi : (a - \delta, a + \delta) \to \mathbb{R}$, $\varphi(a) = b$, *že*

- $F(x, \varphi(x)) = 0$
- $\{(x, u) \in G : F(x, u) = 0\} \cap [(a - \delta, a + \delta) \times (b - \Delta, b + \Delta)] = \operatorname{graf} \varphi$

Zjednodušená verze pro $d = 2$ a $m = 1$:

Věta (o implicitní funkci). *Nechť* $G \subset \mathbb{R}^3$ *je otevřená,* $F : G \to \mathbb{R}$, $F \in C^k(G)$ *pro nějaké* $k \in \mathbb{N}$, $(a_1, a_2, b) = (a, b) \in G \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$. *Předpokládejme, že*

- $F(a, b) = 0$,

- $\dfrac{\partial F}{\partial u}(a,b) \neq 0.$

Potom existují $\delta, \Delta > 0$ *a* C^k *funkce* $\varphi : U(a,\delta) \to \mathbb{R}$, $\varphi(a) = b$, *že*

- $F(x,y,\varphi(x,y)) = 0$
- $\{(x,y,u) \in G : F(x,y,u) = 0\} \cap [U(a,\delta) \times (b-\Delta, b+\Delta)] = \operatorname{graf} \varphi$

Inverzní zobrazení $(d = m)$: Mějme soustavu

$$\begin{aligned} f_1(u_1,\dots,u_d) &= x_1 \\ &\vdots \\ f_d(u_1,\dots,u_d) &= x_d \end{aligned}$$

Pro $f_i \in C^k(G)$, $G \subset \mathbb{R}^d$ otevřená, $i = 1,\dots d$. Položme $f = (f_1,\dots,f_d)$ a $F = (F_1,\dots,F_d)$, kde

$$F_i(x_1,\dots,x_d,u_1,\dots,u_d) = f_1(u_1,\dots,u_d) - x_i, \quad i = 1,\dots,d.$$

Pak $f : G \to \mathbb{R}^d$ a $F : G \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ jsou C^k a $J_F(x,u) = (-\operatorname{Id}_d \,|\, J_f(u))$. Pokud

- $(a,b) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ splňuje $f(b) = a$ (což je totéž jako $F(a,b) = 0$)
- $\det(J_f(b)) \neq 0$,

potom na okolí bodu a lze definovat zobrazení φ, pro které platí

$$F(x,\varphi(x)) = 0, \text{ což je totéž jako } f(\varphi(x)) = x.$$

Tedy φ je inverzní zobrazení (na okolí bodu a) k zobrazení f.
Navíc $J_\varphi(a) = -J_f^{-1}(b)(-\operatorname{Id}_d) = J_f^{-1}(b)$.

Příklady

1. Spočítejte Jacobiho matici zobrazení $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ daných předpisy $F(x, y) = (xy, x - y)$, $G(u, v) = (e^{uv}, u^2 - v^2)$. Spočítejte Jacobiho matici zobrazení $G \circ F$ (jak přímo, tak za pomoci věty o derivaci složeného zobrazení).

2. Nechť $F(3, 5) = (1, 1)$, $F'(3, 5) = \begin{pmatrix} 1, 3 \\ -2, -2 \end{pmatrix}$, $\nabla g(1, 1) = (4, 4)$. Jak vypadá $\nabla(g \circ F)(3, 5)$?

3. Ukažte, že rovnice $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ určuje v jistém okolí bodu $(0, 1)$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě 0.

4. Ukažte, že rovnice $2x^4y + x^3 + y^3 + xy = 1$ určuje v jistém okolí bodu $(1, 0)$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte Taylorův polynom supně 2 této funkce se středem v bodě 1.

5. Ukažte, že rovnice $\sin(xy) + \cos(xy) = 1$ určuje v jistém okolí bodu $(\pi, 0)$ implicitně zadanou funkci (proměnné x). Spočtěte první a druhou derivaci této funkce v bodě π.

6. Ukažte, že rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ určuje v jistém okolí bodu $(1, 1, 1)$ implicitně zadanou funkci (proměnných x a y). Spočtěte gradient této funkce v bodě $(1, 1)$.

7. Ukažte, že rovnice $\frac{x}{z} = \log \frac{z}{y}$ určuje v jistém okolí bodu $(0, 1, 1)$ implicitně zadanou funkci (proměnných x a y). Spočtěte gradient této funkce v bodě $(0, 1)$.

8. Ukažte, že soustava $xe^{u+v} + 2uv - 1 = 0$, $ye^{u-v} - \frac{u}{1+v} - 2x = 0$ určuje v jistém okolí bodu $(1, 2, 0, 0)$ implicitně zadané zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (proměnných x a y). Spočtěte Jacobiho matici tohoto zobrazení v bodě $(1, 2)$.

9. Ukažte, že soustava $x = u \cos \frac{v}{u}$, $y = u \sin \frac{v}{u}$ určuje v jistém okolí bodu $(1, 0, 1, 0)$ implicitně zadané zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (proměnných x a y). Spočtěte Jacobiho matici tohoto zobrazení v bodě $(1, 0)$.

10. Ukažte, že soustava $x = e^u + u \sin v$, $y = e^u - u \cos v$ určuje v jistém okolí bodu $(e + 1, e, 1, \frac{\pi}{2})$ implicitně zadané zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (proměnných x a y). Spočtěte Jacobiho matici tohoto zobrazení v bodě $(e + 1, e)$.

11. Ukažte, že soustava $3 = xy^2 + xu + yv^2$, $2 = x^3y + 2xv - u^2v$ určuje v jistém okolí bodu $(1, 1, 1, 1)$ implicitně zadané zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}^2$ (proměnných x a y). Spočtěte Jacobiho matici tohoto zobrazení v bodě $(1, 1)$.

12. Ukažte, že soustava $u = \sin x + xy + e^z$, $v = \cos y + xe^{-y}$, $w = x^2 + 2y - \cos(xz)$ určuje v jistém okolí bodu $(1+\sin 1, 2, 0, 1, 0, 0)$ implicitně zadané zobrazení z $\mathbb{R}^3$ do $\mathbb{R}^3$ (proměnných u, v a w). Spočtěte Jacobiho matici tohoto zobrazení v bodě $(1+\sin 1, 2, 0)$.