Sada příkladů na 3. týden

Co budeme potřebovat z teorie

Řešíme rovnici $y' = f(x)g(y)$ (tzv. rovnice se separovanými proměnnými). Při hledání řešení postupujeme v následujících šesti krocích:

1. definiční obor funkce $f \to$ maximální intervaly $I_1, I_2, \ldots$
2. definiční obor a nulové body funkce $g \to$ max. intervaly $J_1, J_2 \ldots$
3. stacionární řešení (nulové body g)
4. zvolíme každé $I = I_k$ a $J = J_l$ najdeme
   - F primitivní k f na I
   - G primitivní k $\frac{1}{g}$ na J
5. pro $C \in \mathbb{R}$ najdeme maximální intervaly v množině
   $$\{x \in I : F(x) + C \in G(J)\}$$
   na těch pak máme řešení tvaru $G^{-1}(F(x) + C)$
6. lepení - zde postupojeme podle věty o lepení: nechť y_1 je řešením na (a, b) a y_2 je řešením na (b, c), pokud $\lim\limits_{x \to b-} y_1(x) = L = \lim\limits_{x \to b+} y_2(x)$ a $f(x)g(y)$ je spojitá v (b, L), potom funkce $y : (a, c) \to \mathbb{R}$ definovaná jako
   $$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b), \\ L, & x = b, \\ y_2(x), & x \in (b, c) \end{cases}$$
   je řešením na (a, c).

Příklady

1. Nalezněte obecné řešení rovnice $y' = 1 - y$.
2. Nalezněte obecné řešení rovnice $y' = y^2 - 4$.
3. Nalezněte obecné řešení rovnice $y' = 2x^2y^2$.
4. Nalezněte obecné řešení rovnice $y' = y^{\frac{2}{3}}$.
5. Nalezněte obecné řešení rovnice $y' = \sqrt{y - y^2}$ (můžete využít, že primitivní funkce k $\frac{1}{\sqrt{y-y^2}}$ je $-2\arcsin(\sqrt{1-y})$).
6. Nalezněte obecné řešení rovnice $y' = \sqrt{1 - y^2}$.
7. Nalezněte obecné řešení rovnice $y' = \dfrac{6xy^{\frac{2}{3}}}{1 + x^2}$.
8. Nalezněte obecné řešení rovnice $xy' + y = y^2$.
9. Nalezněte obecné řešení rovnice $(x^2 - 1)y' = 2xy$.
10. Nalezněte obecné řešení rovnice $xy' = 2x - y$.
11. Nalezněte obecné řešení rovnice $x^2y' = y(x - y)$.
12. Nalezněte obecné řešení rovnice $y' = \dfrac{1}{x + y + 1}$.