Sada příkladů na 16.10.2019

1. Nechť (X, ρ) je metrický prostor. Mohou existovat uzavřená množina $M \subset X$ a kompaktní množina $K \subset X$ takové, že neexistují $x \in M$ a $y \in K$ splňující $\rho(x, y) = \mathrm{dist}(M, K) = \inf_{u \in M, v \in K} \rho(u, v)$. (Návod: uvažujte K jednobodovou a $X = l^p$.) Lze takové množiny nalézt v $\mathbb{R}^d$.

2. Dokažte, že množina $\{\{x_n\}_{n=1}^{\infty} : |x_n| \leq \frac{1}{n}\} \subseteq l^2$ je kompaktní.

3. Rozhodněte, zda $\mathbb{R}$ vybavené metrikou $\rho(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ tvoří úplný metrický prostor.

4. Přímým výpočtem ověřte, zda platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ pro $f(x, y) = x^2 y - e^{y^3 x}$.

5. Přímým výpočtem ověřte, zda platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ pro $f(x, y) = xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

6. Spočítejte Jakobiho matici zobrazení $F, G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ daných předpisy $F(x, y) = (xy, x - y)$, $G(u, v) = (e^{uv}, u^2 - v^2)$. Spočítejte Jakobiho matici zobrazení $G \circ F$ (jak přímo, tak za pomoci věty o derivaci složeného zobrazení).