

Co budeme potřebovat z teorie:

Věta 1 (nutná podmínka pro lokální extrém). *Existuje-li $f'(a)$ a f má v bodě lokální extrém, potom $f'(a) = 0$.*

Věta 2 (existence extrémů na intervalu). *Každá $f \in C([a, b])$ nabývá (vzhledem k $[a, b]$) globálního maxima i minima.*

Věta 3 (Darbouxova vlastnost pro spojité funkce). *Je-li $f \in C([a, b])$, potom $f([a, b])$ je omezený uzavřený interval.*

Věta 4 (derivace a monotonie). *Je-li $f \in C((a, b))$ a existuje-li f' na (a, b) , potom:*

1. *pokud $f' > 0$ na (a, b) , potom f je rostoucí na (a, b) ,*
2. *pokud $f' < 0$ na (a, b) , potom f je klesající na (a, b) ,*
3. *pokud $f' \geq 0$ na (a, b) , potom f je neklesající na (a, b) ,*
4. *pokud $f' \leq 0$ na (a, b) , potom f je nerostoucí na (a, b) .*

Věta 5 ((druhá) derivace a konvexita/konkávnita). *Je-li $f, f' \in C((a, b))$ a existuje-li f'' na (a, b) , potom:*

1. *pokud $f'' > 0$ na (a, b) , potom f je ryze konvexní na (a, b) ,*
2. *pokud $f'' < 0$ na (a, b) , potom f je ryze konkávní na (a, b) ,*
3. *pokud $f'' \geq 0$ na (a, b) , potom f je konvexní na (a, b) ,*
4. *pokud $f'' \leq 0$ na (a, b) , potom f je konkávní na (a, b) .*

Věta 6 (postačující podmínka pro extrém). *Nechť f'' existuje na $U(a, \delta)$ a $f'(a) = 0$, potom platí:*

1. *pokud $f'' \geq 0$ na $U(a, \delta)$, potom f má v a lokální minimum,*
2. *pokud $f'' \leq 0$ na $U(a, \delta)$, potom f má v a lokální maximum.*

Definice (inflexní bod). *Říkáme, že a je inflexním bodem funkce f , pokud $f'(a)$ existuje vlastní a existuje $\delta > 0$, že*

f je konvexní na $P_-(a, \delta)$ a konkávní na $P_+(a, \delta)$,

nebo

f je konvexní na $P_+(a, \delta)$ a konkávní na $P_-(a, \delta)$.

Platí, že pokud $f''(a)$ existuje a a je inflexním bodem funkce f , potom $f''(a) = 0$.

Definice. Funkci ve tvaru $Ax + B$ nazýváme asymptotou funkce f v $\pm\infty$, pokud platí

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (Ax + B) = 0.$$

Koeficienty asymptoty (pokud existuje) spočítáme pomocí vzorečů

$$A = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad B = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - Ax).$$

Příklady na extrémy:

1. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$, $x \in \mathbb{R}$.
2. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = e^x \sin x$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$, $x \in \mathbb{R}$.
4. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = x^2 - 4x + 6$ na intervalu $[-3, 10]$.

Příklady na průběh funkce:

1. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \arcsin \frac{2x}{x^2 + 1}$
2. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = (x - 1)e^{\frac{x}{x+1}}$
3. Vyšetřete průběh funkce (bez f'') $f(x) = \cos(x)e^{\frac{2}{3}\sin(x)}$.
4. Vyšetřete průběh funkce (bez f'') $f(x) = \frac{\cos x}{\cos 2x}$
5. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$.
6. Vyšetřete průběh funkce $f(x) = \log^3 |x| - 3 \log |x|$.