Sada příkladů na 7. týden

Co budeme potřebovat z teorie

Věta (nutná podmínka konvergence řady)**.** *Pokud nekonečná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Řady s kladnými členy

Věta (limitní srovnávající kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou řady s kladnými členy a* $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = L$. *Potom*

1. *pokud* $L > 0$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. *pokud* $L < \infty$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$,
3. *pokud* $L \in (0, \infty)$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \iff \sum_{n=1}^{\infty} b_n < \infty$.

Věta (odmocninové kritérium)**.** *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy a* $L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Potom*

1. *pokud* $L < 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$,
2. *pokud* $L > 1$, *pak* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$.

Řady s obecnými členy

Definice (absolutní konvergence)**.** *Říkáme, že nekonečná řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, pokud platí* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$.

Věta (konvergence a absolutní konvergence). *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně, potom konverguje.*

Věta (Abel-Dirichletovo kritérium). *Nechť* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *a* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *jsou posloupnosti s reálnými členy,* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *monotonní.*

Pokud platí alespoň jedna z následujících podmínek:

- *(Abel)* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *omezená a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *konverguje,*
- *(Dirichlet)* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *má omezené částečné součty.*

Potom řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ *konverguje.*

Důležité tvrzení: $\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ má omezené částečné součty pro $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$ má omezené částečné součty pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi : k \in \mathbb{N}\}$.

Příklady

1. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n^2}$.

2. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{\pi}{3}n)}{n}$

3. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ v závilosti na paranetru $z \in \mathbb{R}$.

4. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^7 z^n$ v závilosti na paranetru $z \in \mathbb{R}$.

5. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n}{n^2} z^n$ v závilosti na paranetru $z \in \mathbb{R}$.

6. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n)(\sqrt{n^3+3} - \sqrt{n^3+1}).$$

7. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\pi n) \frac{\sqrt{n+7}}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}}.$$

8. Vyšetřete absolutní konvergenci a konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[213]{n}}$

9. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\tfrac{1}{n}) \cos(n) \sqrt{\frac{n+2}{n(n+1)}}$.

10. Vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\log(\log(n))}$