Sada příkladů na 13.11.2018

Příklady na bonusové body jsou č.4 a č.7

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin nx}{\sin mx}$, $n,\ m \in \mathbb{N}$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$,
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin \pi x}{1-x}$,
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+2x) - 2\sin(a+x) + \sin a}{x^2}$, $a \in \mathbb{R}$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$, $a,\ b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$
6. $\lim\limits_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$
7. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha x} - \mathrm{e}^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x}$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq \beta$

Podle času začneme příklady na následující týden.

1. Zjistěte, kde jsou nespojité funkce
   a) $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ b) $f(x) = \operatorname{sgn} \cos \frac{1}{x}$.
2. Vyšetřete spojitost složených funkcí $f(g(x))$ a $g(f(x))$, je-li
$$f(x) = \operatorname{sgn} x \qquad g(x) = x(1-x^2)\,.$$
3. Dokažte, že jsou-li $f(x)$ a $g(x)$ spojité v x_0, pak jsou spojité v x_0 i funkce
   a) $\min\{f(x), g(x)\}$ b) $\max\{f(x), g(x)\}$.
4. Existuje derivace funkce $f(x) = x|x|$ v bodě 0?
5. Nechť
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 1 \\ ax+b & x > 1\,. \end{cases}$$
   Určete a, b tak, aby $f(x)$ měla v bodě 1 derivaci.
6. Pro jaké α reálné má funkce
$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
   derivaci v bodě 0. Kdy je tato derivace v bodě 0 spojitá?

7. Určete rovnici tečny a normály ke grafu funkce $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 3$ v bodě $[-2, ?]$ grafu.

8. Vypočtěte f' všude, kde existuje pro $f(x) = \dfrac{2x}{1 - x^2}$.

9. Vypočtěte f' všude, kde existuje pro $f(x) = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x^2}$.

10. Vypočtěte f' všude, kde existuje pro $f(x) = \ln(\mathrm{e}^x + \sqrt{1 + \mathrm{e}^{2x}})$.

11. Vypočtěte f' všude, kde existuje pro $f(x) = 2^{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$.

12. Vypočtěte f' všude, kde existuje pro $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

13. Vypočtěte f' všude, kde existuje pro $f(x) = x \cdot \arcsin^2(5x + 7)$.

14. Ověřte, že funkce $u(x) = \frac{1}{|x|}$, kde $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, splňuje v $\mathbb{R}^3 \setminus 0$ Laplaceovu rovnici $\Delta u = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$.

15. Spočtěte $f^{(10)}(x)$ je-li $f(x) = \sqrt{x}$.