

Co bude potřeba z teorie suprema/infima:

Definice (omezená množina, sup, inf). *Nechť $(T, +, \cdot, 0, 1, <)$, kde $(T, +, \cdot, 0, 1)$ je uspořádané těleso a $M \subset T$. Prvek $x \in T$ nazýváme*

1. *horní závorou množiny M , pokud pro každé $y \in M$ platí $y \leq x$*
2. *dolní závorou množiny M , pokud pro každé $y \in M$ platí $y \geq x$*
3. *supremem množiny M , pokud pro každé y horní závoru M platí $y \geq x$,*
4. *infimem množiny M , pokud pro každé y dolní závoru M platí $y \leq x$,*

Množinu M nazýváme zdola (shora) omezenou, pokud má nějakou dolní (horní) závoru, M nazveme omezenou, pokud je zdola i shora omezená.

Fakt. *Každá neprázdná shora omezená množina v $\mathbb{R}$ má supremum. Každá neprázdná zdola omezená množina v $\mathbb{R}$ má infimum.*

Věta (Archimedova vlastnost $\mathbb{R}$). *Pro každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $n > x$.*

Příklady:

1. U následujících množin nalezněte sup, inf, max a min (pokud existují). Ověřte z definice.
 - (a) $M = (0, 1], [0, 1], (0, \infty)$
 - (b) $M = \left\{ \frac{m}{m+n}; m, n \in \mathbb{N} \right\}$
 - (c) $M = \{n^2 - m^2; n, m \in \mathbb{N}\}$
 - (d) $M = \{2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{N}\},$
 - (e) $M = \left\{ (-1)^{-n} + \frac{1}{m^2+m-1}; n, m \in \mathbb{N} \right\}$
2. Nechť A, B jsou neprázdne omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Dokažte:
 - a) $\inf(-A) = -\sup A$
 - b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$Definujeme $-A = \{x; -x \in A\}$, $A + B = \{z; z = x + y, x \in A, y \in B\}$.
3. Nechť A, B jsou neprázdne omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Lze obecně vyjádřit $\sup(A \cup B)$ a $\sup(A \cap B)$ pomocí $\sup A$ a $\sup B$?

4. Necht M je neprázdná množina a necht $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ a $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ jsou omezené funkce. Dokažte, že

$$\sup_{x \in M} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in M} f(x) + \sup_{x \in M} g(x).$$

Musí platit rovnost? Definujeme

$$\sup_{x \in M} f(x) = \sup\{z; z = f(x), x \in M\}.$$

Co bude potřeba z teorie - limity (pokud zbyde čas):

Definice (okolí a prstencové okolí). Pro $a \in \mathbb{R}$ a $\varepsilon > 0$ definujeme množiny

$$P(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}, \quad P_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a), \quad P_+(a, \varepsilon) = (a, a + \varepsilon),$$

a nazýváme je prstencové okolí bodu a , resp. levé a pravé prstencové okolí bodu a . Zároveň definujeme množiny

$$U(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon), \quad U_-(a, \varepsilon) = (a - \varepsilon, a], \quad U_+(a, \varepsilon) = [a, a + \varepsilon),$$

a nazýváme je okolí bodu a , resp. levé a pravé okolí bodu a .

Definice (limita funkce). Necht f je reálná funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Říkáme, že f má v bodě a limitu $L \in \mathbb{R}$ (píšeme $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$), pokud platí následující

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; : x \in P(a, \delta) \implies f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

Definice (jednostranná limita funkce). Necht f je reálná funkce definovaná na nějakém levém, resp. pravém, prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$. Říkáme, že f má v bodě a jednostrannou limitu $L \in \mathbb{R}$ zleva, resp. zprava, (píšeme $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$, resp. $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$), pokud platí následující

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; : x \in P_-(a, \delta) \implies f(x) \in U(L, \varepsilon),$$

resp.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; : x \in P_+(a, \delta) \implies f(x) \in U(L, \varepsilon).$$

Příklady:

1. Dokažte z definice. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$

2. Dokažte z definice. a) $\lim_{x \rightarrow 1+} [x] = 1,$ b) $\lim_{x \rightarrow 1-} [x] = 0.$