Sada příkladů na 12. týden

Příklady:

1. Nalezněte parametrizaci elipsy $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
2. Nalezněte parametrizaci průniku sféry a nadroviny.
3. Nalezněte parametrizaci průniku dvou sfér.
4. Nalezněte parametrizaci epicykloidy (trajektorii pevně zvoleného bodu kružnice kutálející se na jiné kružnici).
5. Spočtěte křivkový integrál 1. druhu $\int_{\langle\phi\rangle} x^2$, kde $\phi(t) = (t, \log t)$, $t \in (1, 2)$.
6. Spočtěte křivkový integrál 1. druhu $\int_{\langle\phi\rangle} x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}$, kde $\langle\phi\rangle$ je množina bodů, pro které platí $x^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$.
7. Spočtěte křivkový integrál 1. druhu $\int_{\langle\phi\rangle} x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}$, kde $\langle\phi\rangle$ je množina bodů, pro které platí $(x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2)$.
8. Spočtěte křivkový integrál 2. druhu $\int_{\langle\phi\rangle} (x^2+y^2)dx+(x^2-y^2)dy$, kde $\langle\phi\rangle$ je trojúhelník s vrcholy $(0, 0)$, $(1, 0)$ a $(0, 1)$ s parametrizací procházející body v tomto pořadí (počítejte přímo i pomocí Greenovy věty).
9. Spočtěte křivkový integrál 2. druhu $\int_{\langle\phi\rangle} \left(\dfrac{x+y}{x^2+y^2}, \dfrac{y-x}{x^2+y^2}\right) \cdot ds$, kde $\langle\phi\rangle$ je kružnice $x^2 + y^2 = 9$ s kladnou parametrizací (tedy proti směru hodinových ručiček).
10. Spočtěte křivkový integrál 2. druhu $\int_{\langle\phi\rangle} y\,dx + z\,dy + x\,dz$, kde $\langle\phi\rangle$ je množina bodů, pro které platí $z = xy$ a $x^2 + y^2 = 1$, procházející body $(1, 0, 0)$ a $(0, 1, 0)$ v tomto pořadí.
11. Pomocí věty o potenciálu ukažte, že
$$\int_{\langle\phi\rangle} \sin(x^2 + y^2 + z^2)(x, y, z) \cdot ds = 0$$
přes každou uzavřenou křivku ϕ.
12. Pomocí věty o potenciálu spočítejte
$$\int_{\langle\phi\rangle} (x^4 + 4xy^3, 6x^2y^2 - 5y^4) \cdot ds = 0,$$
kde γ je křivka s počátečním bodem $(-2, -1)$ a koncovým bodem $(3, 0)$.

13. Pomocí věty o potenciálu spočítejte

$$\int_{\langle\phi\rangle} \left(2xy^2 + 3x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{2x}{y^2}, 2x^2y + 3y^2 + \frac{1}{y^2} - \frac{2x^2}{y^3}\right) \cdot ds = 0,$$

kde ϕ je křivka s počátečním bodem $(2, 1)$ a koncovým bodem $(1, 2)$ procházející prvním kvadrantem.