Sada příkladů na 7.týden

Co bude potřeba z teorie:

Definice (primitivní funkce). *Říkáme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f na (otevřeném) intervalu I pokud $F' = f$ na I.*

Definice (neurčitý integrál). *Množinu všech primitivních funkcí k funkci f (na I) značíme $\int f(x)\,dx$ a nazýváme neurčitým integrálem funkce f (na I).*

Je-li F primitivní funkcí k funkci f, platí $\int f(x)\ dx = \{F + C : C \in \mathbb{R}\}$, což zkráceně zapisujeme $\int f(x)\ dx \stackrel{c}{=} F(x)$ a říkáme, že neurčitý integrál z funkce f je až na konstantu roven funkci F. Často též uvidíte zápis $\int f(x)\ dx = F(x)+C$. Rovněž často vynecháváme závislost na x i symbol dx.

Věta (linearita primitivních funkcí). *Nechť F je primitivní funkcí k funkci f a G primitivní funkcí k funkci g (obojí na intervalu I) a buď $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Potom $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkcí k funkci $\alpha f + \beta g$ (na intervalu I).*

Věta (per partes pro neurčitý integrál). *Nechť F je primitivní funkcí k funkci f a G primitivní funkcí k funkci g (obojí na intervalu I) a nechť f je spojitá na I. Potom*

$$\int Fg = FG - \int fG \quad (na\ I).$$

Věta (1. věta o substituci pro neurčitý integrál). *Nechť F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu (a, b) a nechť $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ má vlastní derivaci ve všech bodech intervalu (α, β). Potom*

$$\int \varphi'(t) \cdot f \circ \varphi(t)\ dt \stackrel{c}{=} F \circ \varphi \quad na\ (\alpha, \beta).$$

Věta (2. věta o substituci pro neurčitý integrál). *Nechť φ má vlastní a nenulovou derivaci ve všech bodech intervalu (α, β) a nechť $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Pokud pro f definovanou na intervalu (a, b) platí*

$$\int \varphi'(t) \cdot f \circ \varphi(t)\ dt \stackrel{c}{=} G(t) \quad na\ (\alpha, \beta)$$

potom

$$\int f(t)\ dt \stackrel{c}{=} G \circ \varphi^{-1}(t) \quad na\ (a, b).$$

Příklady:

Příklady bez substitucí:

1. $\displaystyle\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \, dx,$
2. $\displaystyle\int \tan^2 x \, dx,$
3. $\displaystyle\int xe^x \, dx,$
4. $\displaystyle\int x^2 \sin x \, dx$
5. $\displaystyle\int x \arctan x \, dx,$
6. $\displaystyle\int \log x \, dx$
7. $\displaystyle\int \log^2 x \, dx$
8. $\displaystyle\int x \operatorname{arctanh} x \, dx$
9. $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx$
10. $\displaystyle\int \cos^2 x \, dx$
11. $\displaystyle\int \sin^4 x \, dx$
12. $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x} \, dx$
13. $\displaystyle\int \sin(\ln x) \, dx$

Příklady s jednoduchými substitucemi:

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - x + 2} \, dx$
2. $\displaystyle\int \tan^2 x \, dx,$

3. $\displaystyle\int \frac{1}{1+\cos x}\,dx$

4. $\displaystyle\int \sin(3x-5)\,dx$

5. $\displaystyle\int xe^{-x^2}\,dx,$

6. $\displaystyle\int x^3a^{-x^2}\,dx$

7. $\displaystyle\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,dx$

8. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(\arcsin x)^2}\,dx$

9. $\displaystyle\int \sin^7 x\,dx$

10. $\displaystyle\int \arccos x\,dx$

11. $\displaystyle\int \operatorname{arcsinh} x\,dx$

12. $\displaystyle\int \operatorname{arctanh} x\,dx$