Sada příkladů na 10.10.2017

1. Dokažte matematickou indukcí: $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

2. Dokažte matematickou indukcí: $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$

3. Dokažte matematickou indukcí: $\prod_{i=1}^{n}(1 + x_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^{n} x_i$, $x_i \geq -2$, x_i mají stejná znaménka

4. Dokažte matematickou indukcí: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

5. * Dokažte matematickou indukcí: $\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots x_n)$, $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ (AG nerovnost)

6. * Dokažte matematickou indukcí: $\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \sin x_k$, $x_k \in [0, \pi]$, $k = 1, 2 \dots, n$

7. U následujících množin nalezněte sup, inf, max a min (pokud existují). Ověřte z definice!
   a) $M = (0, 1]$, $[0, 1]$, $(0, \infty)$
   b) $M = \left\{\frac{m}{m+n}; m, n \in \mathbb{N}\right\}$
   c) $M = \left\{n^2 - m^2; n, m \in \mathbb{N}\right\}$
   d) $M = \left\{2^{-n} + 3^{-n}; n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

8. Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Dokažte:
   a) $\inf(-A) = -\sup A$
   b) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$
   Definujeme $-A = \{x; -x \in A\}$, $A + B = \{z; z = x + y, x \in A, y \in B\}$.

9. * Nechť A, B jsou neprázdné omezené podmnožiny $\mathbb{R}$. Lze obecně vyjádřit $\sup(A \cup B)$ a $\sup(A \cap B)$ pomocí $\sup A$ a $\sup B$?

10. * Nechť M je neprázdná množina a nechť $f : M \to \mathbb{R}$ a $g : M \to \mathbb{R}$ jsou omezené funkce. Dokažte, že

$$\sup_{x \in M} (f(x) + g(x)) \leq \sup_{x \in M} f(x) + \sup_{x \in M} g(x).$$

Musí platit rovnost? Definujeme

$$\sup_{x \in M} f(x) = \sup\{z; z = f(x), x \in M\}.$$