1. Uvažuje hody třemi symetrickými kostkami s výsledky a, b, c. Označme postupně $A :=$ $[a \cdot b$ je liché číslo$]$ $B := [b \cdot c$ je dělitelné třemi$]$ $C := [b$ je 1 nebo 3$]$.

(i) Rozhodněte, zda jsou jevy A, B, C nezávislé a pokud ne, zjistěte, které dvojice jevů nezávislé jsou a které ne.

(ii) Spočtěte $P(A|B), P(A|C), P(B|C), P(C|A), P(A|C), P(B|C)$.

2. Střílíte na kruhový terč o poloměru 1 metr, zasáhnete ho s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. Pokud terč zasáhnete, tak pravděpodobnost, že se strefíte do nějaké oblasti je přímo úměrná její ploše.

(a) Spočtěte pravděpodobnost, že se trefíte do kruhu (soustředného s tečem) o průměru 1 metr.

(b) Jak se tato pravděpodobnost změní, pokud víte, že jste terč zasáhli ?

(c) Jaká je střední doba počtu pokusů potřebných k tomu, abyste zasáhli (i) terč (ii) kruh v terči o průměru 1 metr ?

3. Ve váčku máte dvě hrací kostky na pohled od sebe k nerozeznání, jednu spravedlivou a jednu cinknutou tak, že pravděpodobnost padnutí hodnoty 6 je $\frac{1}{2}$. Náhodně jednu z nich vyberete a hodíte 6. S jakou pravděpdobností je vybraná kostka cinknutá ?

Dále přepokládejte, že váš soupeř dostane tu druhou a hrajete spolu hru - kdo dřív hodí 6. Protože jste na zkoušku hodili 6 věříte si, a proto necháte soupeře začínat. S jakou pravděpodobností se stanete vítězem, pokud se se svým protivníkem v házení kostkami střídáte ?

4. Ve váčku máte dvě hrací kostky na pohled od sebe k nerozeznání, jednu spravedlivou a jednu cinknutou tak, že pravděpodobnost padnutí hodnoty 6 je $\frac{1}{2}$. Náhodně jednu z nich vyberete a házíte, dokud vám nepadne 6. Jaká je pravděpodobnost, že máte cinknutou kostku, pokud jste celkem k-krát hodili, než vám na $k+1$-ní pokus padlo 6 ? Dopočítejte pro $k = 0, 1, 2, 3$. Jak se tato pravděpodobnost změní, pokud si váš soupeř vezme druhou kostku a na první pokus s ní hodí šestku ?

5. Jedna dívka si dala rande se dvěma chlapci na stejném místě nezávisle na sobě ale v neurčitém čase mezi 12:00 a 14:00. (Předpokládejte, že všichni tři přijdou ve stanoveném časovém intervalu nezávisle jeden na druhém i na třetím tak, že pravděpodobnost příchodu v nějakém časovém intervalu je úměrná jeho délce.) Řekněme, že první chlapec vydrží na dívku čekat pouze 10 minut, druhý 20 minut a dívka celkem 30 miunt. Pokud se na smluveném místě nikoho nedočkají, odcházejí domů. Jakmile se dívka dočká jednoho z chapců nebo naopak, jde s ním na rande. Pokud se na smluveném místě oba chlapci setkají, jdou na pivo.

(a) S jakou pravděpodobností bude mít dívka rande s prvním chlapcem ?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že šli chlapci na pivo, pokud víte, že se dívka ani po 30 minutách ani jednoho z nich nedočkala ?

6. Předpokládejte, že na MFF UK je celkem n studentů (Bc. a Mgr. studia). Ve stanoveném týdnu se mají dostavit na studijní oddělení ke kontrole studijních povinností. Jediné, co vědí je, že úřední hodiny nezčínají dříve než v 9:00 a netrvají po 17-té hodině, a proto tomoto rozmezí přicházejí na sobě nezávisle (aby nemuseli čekat dlouho ve fromtě) a rovnoměrně každý den ve stanoveném týdnu (nezávisle na přechozích pokusech), dokud se netrefí do úředních hodin.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že se náhodně zvolenému studentu nepodaří v určeném týdnu prokázat splnění studijních povinností, a bude tak vyloučen ze studia ?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že student Bc.-studia (3 roky) resp. student Mgr.-studia (5 let) tímto způsobem dosáhne zvoleného titulu. Jak se tato pravděpodobnost změní, pokud si studium prodlouží ještě o jeden rok ?

Úřední hodiny studijího oddělení lze nalézt na http://www.mff.cuni.cz/fakulta/stud/uh.htm