Diskrétní reálné náhodné veličiny a vektory

Vytvořující funkcí posloupnosti $p_n \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}$ rozumíme funkci danou mocninnou řadou

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k.$$

Tato funkce konverguje absolutně a lokálně stejnoměrně v kruhu konvergence $\{x \in \mathbb{C} : |x| < R\}$, kde

$$R = \liminf_{n\to\infty} |a_n|^{-1/n} \in [0, \infty]$$

je poloměr konvergence příslušné mocninné řady. Je-li X náhodná veličina s hodnotami v $\mathbb{N}_0$, pak

$$A_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k)s^k = Es^X$$

vytvořující funkci posloupnosti $p_k = P(X = k)$ nazveme vytvořující funkcí veličiny X. Protože $p_k \in [0, 1]$, je poloměr konvergence $R \geq 1$. Pokud $R > 1$, záměnou derivace a sumy v mocninné řadě unitř kruhu konvergence snadno dostaneme, že

$$EX^{[k]} = E(X^{[k]}s^X)|_{s=1} = \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}Es^X|_{s=1} = A^{(k)}(1).$$

Obecněji $EX^{[k]} = A^{(k)}(1_-)$, kde

$$x^{[k]} = x(x-1)\cdot\ldots\cdot(x-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1}(x-j)$$

je k-tá faktoriální mocnina čísla x. Střední hodnota reálné náhodné veličiny $f(X)$ je dánan vzorcem

$$Ef(X) = \sum_{k=0}^{\infty} f(k)P(X = k).$$

---

(1) Spočtěte vytvořující funkci, střední hodnotu a rozptyl náhodné veličiny, která má
  (a) geometrické rozdělení
  (b) Poissonovo rozdělení.

(2) Ukažte, ze součet nezávislých náhodných veličin
  (a) s binomickým rozdělením s pravděpodobností zdaru $p \in [0, 1]$ má opět binomické rozdělení
  (b) s Poissonovým rozdělením má opět Poissonovo rozdělení

(3) Spočtěte rozdělení náhodné veličiny $Y = X_1 + \ldots + X_k$, kde X_j jsou nezávislé náhodné veličiny s geometrickým rozdělením s pravděpodobností zdaru $p \in (0, 1)$ pomocí vytvořující funkce.

(4) Určete rozdělení celkového počtu ok, která která padnou při hodu třemi hracími kostkami.

(5) V urně je b kuliček bílé barvy a c kuliček černé barvy. Náhodně z urny vybereme náhodně celkem n kuliček. Určete rozdělení náhodné veličiny udávající počet kuliček bílé barvy ve výběru. Spočtete střední hodnotu a rozptyl této náhodné veličiny.

(6) Ověřte, že vztah $P(X = j) = j/55, j = 1, \ldots, 10$ určuje rozdělení rozdělení náhodné veličiny X a spočtěte její střední hondotu.

(7) Sdružené rozdělení náhodných veličin U a V je dáno následující tabulkou.

$U \backslash V$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.3
2	0.2	0.1	0.1

Najděte marginální rozdělení U, V, jejich střední hodnoty, rozptyly a korelační koeficient.

(8) Reálný náhodný vektor $(X, Y)^\intercal$ má rovnoměrné rozdělení na množině $\{(0, 1), (0, 3), (1, 0), (1, 2), (2, 1), (2, 3)\}$.
  a) Rozhodnětě, zda jsou veličiny X, Y nezávislé a zda jsou nezávislé veličiny $X - Y, X + Y$.
  b) Spočtěte varianční matici vektoru $(X, Y, X - Y, X + Y)^\intercal$.