1. **Výběrová šetření** Uvažujme populaci N jedinců $S := \{1, \cdots, N\}$ a z ní náhodně vybraný vzorek $s = \{i_1, \cdots, i_n\}$ n jedinců takovým způsobem, že všechny $s \in \Omega := \binom{S}{n}$ n-prvkové podmnožiny S jsou stejně pravděpodobné. Spočtěte pravděpodobnost

(a) $V_i := \{s \in \Omega : i \in s\}$, že i-tý jedinec bude zahrnut do výběru,
(b) $V_{i,j} := V_i \cap V_j$, že i-tý a j-tý jedinci budou oba zahrnuti ve výběru s, kde $i \neq j$.
(c) $V_{i+k} := V_i \cup V_k$, že alespoň jeden z jedinců i, k bude zahrnut ve výběru s, kde $i \neq k$.
(d) $V_{i-k} := V_i \backslash V_k$, že i-tý jedinec bude zahrnut do výběru s zatímco k-tý ne, kde $i \neq k$.
(e) $V_{i\nabla k} := V_i \Delta V_k$, že právě jeden z jedinců i, k bude zahrnut ve výběru s, kde $i \neq k$.

2. **Šatnářka** Uvažujme náhodné permutace n-prvkové množiny $\{1, \cdots, n\}$, tak, že každá permutace $\pi \in \Omega := \{p : \{1, \cdots, n\} \to \{1, \cdots, n\}$ bijekce $\}$ má stejnou pravděpodobnost. Spočtěte pravděpodobnost, že výsledná náhodná permutace bude mít pevný bod, tj. pravděpodobnost množiny $\{\pi \in \Omega : \exists i \in \{1, \cdots, n\}\ \pi(i) = i\}$.

3. Házíme postupně šesti kostkami a obdržíme posloupnost $(k_1, \cdots, k_6)$ dosažených bodů.
(a) Jaká je pravděpodobnost, že takto obdrdžíme monotonní posloupnbost ?
(b) Jaká je pravděpodobnost, že maximum $\max(k_1, \cdots, k_n)$ je rovno $l = 1, \cdots, 6$?

4. Uvažujme rodiny, ve kterých jsou tři děti. Jaká je pravděpodobnost, že v náhodně vybrané rodině jsou dvě děvčata a jeden chlapec, jestliže predpokládáme, že se chlapci a děvčata rodí se stejnou pravděpodobností ?

5. Osudí obsahuje celkem pět koulí (bílá, modrá, černá, červen 8, zelená), které se liší pouze barvou. Náhodně vytáhneme tři koule. Jaká je pravděpodobnost, že mezi nimi
(a) je bílá koule
(b) není modrá koule
(c) je bílá a není modrá koule ?

6. V osudí je 8 bílých, 8 modrých a 8 červených koulí. Vytáhneme jednu kouli, zaznamenáme její barvu, kouli vrátíme, obsah osudí dobře promícháme a opět vytáhneme jednu kouli.
(a) Jaká je pravděpodobnost, že obě koule mají stejnou barvu ?
(b) Jak se tato pravděpodobnost změní, jestliže první vytaženou kouli zpět do osudí nevracíme ?

7. Házíme šesti hracími kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že
(a) padnou vesměs různá čísla,
(b) padnou vesměs lichá čísla ?

8. Třicet studentů bylo náhodně rozděleno do skupin po deseti osobách.
(a) Jaká je pravděpodobnost, že Yveta a Zdeněk se dostali do stejné skupiny ?

(b) Jak se tato pravděpodobnost změní, jesliže nově vznikající skupiny budou mít 8, 12 a 10 osob ?

9. Ze stovky očíslovaných vstupenek byly náhodně vylosovány tři. Jaká je pravděpodobnost, že tyto vstupenky lze uspořádat do aritmetické posloupnosti ?

10. Jaká je pravděpodobnost, že se ve třídě, kde je n žáků, najde dvojice, která má narozeniny ve stejný den v roce ? (Uvažujte roky s 365 dny a rovnoměrným rozením dětí během roku.)

11. Jaká je pravděpodobnost, že ve třídě, kde je n žáků, existuje spolužák, který má narozeniny ve stejný den jako třídní profesor ?

12. Uvažujme pokus, který má dva možné výsledky: zdar Z s pravděpodobností $\frac{1}{2} + \varepsilon$ a nezdar N s pravděpodobností $\frac{1}{2} - \varepsilon$, kde $\varepsilon > 0$. Pokus dvakrát nezávisle opakujeme. Rozhodněte, které ze dvou následujících jevů mají větší pravděpodobnost $A = \{(Z, Z), (N, N)\}, B = \{(Z, N), (N, Z)\}$.

13. Nechť platí $P(A) = 0.3, P(B) = 0.4, P(A \cup B) = 0.6$. Spočítejte podmíněné pravděpodobnosti $P(A|B)$ a $P(B|A)$ a rozhodněte o nezávislosti jevů A, B.

14. Náhodné jevy A, B, C jsou nezávislé a mají stejnou pravděpodobnost rovnou 0.1. Určete $P(A \cup B \cup C)$.

15. Náhodné jevy A, B splňují $P(B|A) = 0.216, P(A) = 0.9, P(B) = 0.25$. Určete $P(A|B)$ a $P(A \backslash B)$.

16. Házíme dvěma hracími kostkami. Jev A znamená, že na první kostce padlo liché číslo, jev B znamená, že na druhé padlo sudé číslo. Jev C znamená, že součet obou čísel je lichý.
(a) Jsou jevy A, B, C nezávislé ?
(b) Jsou jevy A, B, C po dvou nezávislé ?

17. Na MFF UK je v průměru 20 procent dívek, p procent z dívek a q procent z chlapců má dlouhé vlasy. Stanovte hodnoty parametrů p a q a spočtěte pravděpodobnost, že náhodný student je dívka, víte-li, že má dlouhé vlasy.