Cvičení z teorie pravděpodobnosti 2

3. kompenzátory a (super/sub)-martingaly

1. výpočet kompenzátoru v diskrétním případě
2. posouzení, zda integrovatelný proces je martingal, popř. super/sub-martingal
3. výpočet kompenzátoru k jednobodovému čítacímu procesu

---

1. Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé stejně rozdělené veličiny s konečnými třetími momenty s $EX_1 = 0, EX_1^2 = \text{var}(X_1) = 1$. Označme $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ odpovídající náhodnou procházku. Spočtěte kompenzátor k následujícímu procesu a rozhodněte, zda je následující proces (super/sub)-martingal.
   (a) $Y_n = S_n^2$,
   (b) $Z_n = S_n^3$.
2. Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou nezávislé stejně rozdělené veličiny s konečnými třetími momenty s $EX_1 = 0, EX_1^2 = \text{var}(X_1) = 1$ s následujícími konečnými momenty $E\exp\{X_1\} < \infty, E\ln|X_1| < \infty$. Rozhodněte, zda jsou následující procesy $\sigma(X_1, \ldots, X_n)$-martingaly a, pokud ne, spočtěte kompenzátor.
   (a) $S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad V_n = \sum_{k=1}^n X_k^2, \quad W_n = \prod_{k=1}^n X_k, \quad U_n = W_n^2, \quad M_n = \sum_{k=1}^n W_k$
   (b) $F_n = \exp\{S_n\}, \quad G_n = \sum_{k=1}^n \ln|X_k|, \quad H_n = \sum_{k=2}^n X_{k-1}X_k \quad L_n = \sum_{k=2}^n X_{k-1}^2 X_k$
3. Nechť X_n, Y_n jsou $(\mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N})$-martingaly takové, že $Z_n = X_n Y_n \in \mathbb{L}_1, n \in \mathbb{N}$. Ukažte, že
$$K_n = \sum_{k=1}^n \text{cov}(X_k, Y_k | \mathcal{F}_{k-1})$$
   je kompenzátor k procesu Z_n, kde $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.
4. Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}_0$ má $\mathcal{F}_n$-kompenzátor K_n a H_n je omezený $\mathcal{F}_{k\uparrow}$-adapovaný proces, kde $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$. Spočtěte kompenzátor k procesu $\sum_{k=1}^n H_k(X_k - X_{k-1})$.
5. Nechť $X_n, n \in \mathbb{N}$ jsou kladné nezávislé stejně rozdělené veličiny s exponenciálním rozdělením se střední hodnotou $1/\lambda$ a $\tau_n = \sum_{k=1}^n X_k$ je odpovídající náhodná procházka.
   (a) Spočtěte kompenzátor k čítacímu procesu $1_{[\tau_1 \le t]}$.
   (b) Ukažte, že Poissonův process $N_t = \sum_{k=1}^\infty 1_{[\tau_k \le t]}$ s intenzitou $\lambda > 0$ má kompenzátor $\lambda t, t \ge 0$.

6.* Nechť $(W(t), t \ge 0)$ je Wienerův proces. Spočtetě kompenzátor následujícího procesu vzhledem k $\mathcal{F}_t^W, t \ge 0$ a rozhodněte, zda následující proces je (sub/super)-martingal
   (a) $X_t = W_t^2$
   (b) $Y_t = W_t^3$
   (c) $Z_t = \exp\{W_t\}$.

---

1. Nechť $X_t \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_t), t \in T$. Proces $K_t \in \mathbb{L}_1(\mathcal{F}_{t\uparrow})$ je $\mathcal{F}_t$-kompenzátorem procesu $(X_t, t \in T)$, pokud $X_t - K_t$ je $\mathcal{F}_t$-martingal.
2. Nechť $\tau > 0$ je náhodná velčina s hustotou f_τ. Pak odpovídající čítací proces $N_t = 1_{[\tau \le t]}$ má kompenzátor
$$K_t = \int_0^{t \wedge \tau} \frac{f_\tau(s)}{P(\tau > s)} \, \mathrm{d}s$$
   vzhledem k filtraci $\mathcal{F}_t = \sigma(N_s, s \le t)$.