NMSA334: cvičení 6 – rozložitelné řetězce

Uvažujme Markovův řetězec s množinou přechodných stavů T. Pokud byl řetězec na počátku v přechodném stavu i, potom definujeme u_{ij} jako pravděpodobnost, že j bude první navštívený trvalý stav po opuštění množiny T. Platí

$$u_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \in T} p_{ik} u_{kj}, \quad i \in T, j \in T^c.$$

Pokud Markovův řetězec s konečně mnoha stavy obsahuje přechodné stavy, pak matici pravděpodobností přechodu můžeme přeuspořádat do tvaru

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{P}^* & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{R} \end{pmatrix},$$

kde $\boldsymbol{P}^* = \{p_{ij} : i, j \in T^c\}$, $\boldsymbol{Q} = \{p_{ij} : i \in T, j \in T^c\}$, $\boldsymbol{R} = \{p_{ij} : i, j \in T\}$. Definujeme-li $\boldsymbol{U} = \{u_{ij} : i \in T, j \in T^c\}$, pak pravděpodobnosti u_{ij} můžeme získat ze vztahu

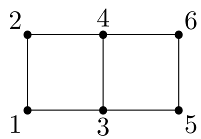
$$\boldsymbol{U} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{Q}.$$

Matice $\boldsymbol{F} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{R})^{-1}$ se nazývá *fundamentální matice* Markovova řetězce.

Příklad 6.1: Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 6.2: Uvažujme objekt, který se pohybuje po plánu znázorněném na obrázku. Pohyby jsou pouze mezi šesti vyznačenými body. V každém kroku si objekt vybere jeden ze čtyř směrů (sever, východ, jih, západ – každý se stejnou pravděpodobností) a tímto směrem se vydá. Určeným směrem se pohybuje tak dlouho, dokud je to možné (pokud v daném směru nevede cesta, zůstává na místě). Označme X_n polohu částice po n krocích. Určete matici pravděpodobností přechodu $\boldsymbol{P}$ Markovova řetězce $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$. Klasifikujte stavy řetězce a určete matici $\boldsymbol{U}$ pravděpodobností absorpce do trvalých stavů. Spočtěte stacionární rozdělení.



Příklad 6.3: Klasifikujte stavy a spočtěte stacionární rozdělení Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete pravděpodobnosti absorpce do množiny trvalých stavů.

Příklad 6.4: Mějme urnu a 5 koulí. V každém kroku budeme koule z urny odebírat nebo do urny přidávat podle následujícího schématu. Pokud je urna prázdná, naplníme ji všemi pěti koulemi. V opačném případě z urny odebereme s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ čtyři koule, s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ dvě koule a s pravděpodobností $\frac{1}{3}$ žádnou kouli. Pokud bychom měli odebrat více koulí než se právě v urně nachází, tak odebereme všechny koule, které v urně jsou. Nechť X_n značí počet koulí v urně po n krocích. Určete matici pravděpodobností přechodu Markovova řetězce $\{X_n, n \in \mathbb{N}\}$. Klasifikujte stavy řetězce a spočtěte stacionární rozdělení (pokud existuje). Určete matici pravděpodobností absorpce do trvalých stavů. Předpokládejte, že počáteční rozdělení je rovnoměrné (každý stav má stejnou pravděpodobnost) a spočtěte absolutní pravděpodobnosti po prvním kroku.

Příklad 6.5: Klasifikujte stavy Markovova řetězce s maticí pravděpodobností přechodu

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} q_0 & 0 & p_0 & 0 & 0 & \dots \\ q_1 & 0 & 0 & p_1 & 0 & \dots \\ q_2 & 0 & 0 & 0 & p_2 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix},$$

kde $0 < p_i < 1$ pro všechna $i \in \mathbb{N}_0$ a $q_i = 1 - p_i$. Nalezněte stacionární rozdělení tohoto řetězce (pokud existuje).