

CVIČENÍ 2

1. Ve kterých bodech mají následující funkce derivaci podle komplexní proměnné?

- a) $\bar{z}$ b) $|z|$ c) $|z|^2$ d) $|(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2| + 2i|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|$ e) $|z|^2 + i \operatorname{Re}(z^2)$
 f) $|z|^2 + i \operatorname{Im}(z^2)$ g) $(\operatorname{Re} z)^2 + i(\operatorname{Im} z)^2$ h) $\operatorname{Re}(z^2) - i \operatorname{Im}(z^2)$

2. Nalezněte hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x + iy) := \frac{3}{2}x^2 - i\alpha xy + \beta y^2$ ($x, y \in \mathbb{R}$) byla diferencovatelná ve všech bodech $\mathbb{C}$.

3. Pro jaké hodnoty $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je funkce $f(x + iy) := x^2 + \alpha x + \alpha y + i(y^2 - 5\beta y + \beta x)$ ($x, y \in \mathbb{R}$) diferencovatelná v bodě $1 + 3i$?

4. Je dána funkce $f(x + iy) := x(x^2 - \alpha y^2) + iy(\beta x^2 - y^2)$ ($x, y \in \mathbb{R}$), kde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ jsou parametry. Nalezněte všechny hodnoty parametrů $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tak, aby f byla diferencovatelná

- a) na přímce o rovnici $\operatorname{Im} z = 0$ b) ve všech bodech $\mathbb{C}$.

5. Nalezněte všechny funkce diferencovatelné ve všech bodech $\mathbb{C}$, jejichž reálná část je rovna

- a) $u(x + iy) = 2x - x^3 + 3xy^2$ b) $v(x + iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2xy$ a $f(0) = 2i$.

VÝSLEDKY

- 1.** a) v žádném bodě b) v žádném bodě c) v bodě 0 d) v bodě 0 a v bodech z , pro které platí $0 < \operatorname{Im} z < \operatorname{Re} z$, $\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z < 0$, $0 < -\operatorname{Re} z < \operatorname{Im} z$ nebo $\operatorname{Im} z < -\operatorname{Re} z < 0$ e) v bodech přímky $\operatorname{Re} z = -\operatorname{Im} z$ f) v bodech reálné osy g) v bodech přímky $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ h) v bodě 0

2. $\alpha = -3, \beta = -\frac{3}{2}$

3. $\alpha = -1, \beta = 1$

4. a) $\beta = 3, \alpha \in \mathbb{R}$ b) $\beta = 3 = \alpha$

5. a) $f(z) = f(x + iy) = 2x - x^3 + 3xy^2 + i(2y - 3xy^2 + y^3 + C) = 2z - z^3 + iC$, kde $C \in \mathbb{R}$

b) $f(z) = f(x + iy) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 + 2xy + i(4x^3y - 4xy^3 + y^2 - x^2 + 2) = z^4 - iz^2 + 2i$

CVIČENÍ 3

1. Najděte reálnou a imaginární část následujících hodnot funkcí.

a) $\sin(2+i)$ b) $\cos(2i)$ c) $\operatorname{tg}(2-i)$ d) $\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{4} - i \log 3)$ e) $\operatorname{tgh}(2+i)$ f) $\operatorname{cotgh}(\log 3 + i\frac{\pi}{4})$

2. Najděte všechna řešení následujících rovnic v $\mathbb{C}$.

a) $\sin z + \cos z = 10$ b) $\sin z - \cos z = i$ c) $\cosh z - \sinh z = 1$ d) $\cosh z - \sinh z = 2i$

VÝSLEDKY

1. Výsledky ve tvaru $\operatorname{Re} z; \operatorname{Im} z$: a) $\sin 2 \cdot \cosh 1; \cos 2 \cdot \sinh 1$ b) $\cosh 2; 0$ c) $\frac{\sin 2 \cdot \cos 2}{\cos^2 2 + \sinh^2 1}; \frac{-\sinh 1 \cdot \cosh 1}{\cos^2 2 + \sinh^2 1}$ d) $\frac{9}{41}; \frac{40}{41}$ e) $\frac{\sinh 2 \cdot \cosh 2}{\cos^2 1 + \sinh^2 2}; \frac{\sin 1 \cdot \cos 1}{\cos^2 1 + \sinh^2 2}$ f) $\frac{40}{41}; -\frac{9}{41}$

2. a) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi - i \log(5\sqrt{2} \pm 7), k \in \mathbb{Z}$ b) $\frac{\pi}{4} + 2k\pi - i \log \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}, -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi - i \log \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}, k \in \mathbb{Z}$ c) $2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$
d) $-\log 2 + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$

CVIČENÍ 4

1. a) Spočtete pro $z \in \{-1, 1+i, -i\}$ hodnoty $\log(z^2)$ a $2\log(z)$.
- b) Ukažte, že pro $z = -1$, $b = 2$ a $a = 1/2$ dostaneme $m_a(m_b(z)) \neq m_{ab}(z)$.
- c) Nalezněte číslo $z \in \mathbb{C}$ takové, že $\log(m_2(z)) \neq 2\log(z)$.
- d) Nalezněte čísla $z, w, a \in \mathbb{C}$ taková, že $m_a(zw) \neq m_a(z) \cdot m_a(w)$.

2. Spočtete křivkový integrál $\int_{\varphi} f$, kde:

- a) $f(z) = \operatorname{Re} z$, φ je orientovaná úsečka $[0, 1+i]$
- b) $f(z) = \operatorname{Im} z$, φ je kladně orientovaná půlkružnice daná podmínkami $|z| = 1$, $0 \leq \arg z \leq \pi$
- c) $f(z) = |z|$, φ je orientovaná úsečka $[0, 2-i]$
- d) $f(z) = |z|$, φ je kladně orientovaná půlkružnice daná podmínkami $|z| = 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$
- e) $f(z) = ze^z$, φ je kladně orientovaný čtverec s vrcholy $0, 1, 1+i, i$
- f) $f(z) = \frac{z}{z}$, φ je kladně orientovaná hranice horního polomezikruží se středem v 0 a poloměry 1 a 2
- g) $f(z) = (z-a)^n$ (kde $a \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{Z}$), φ je kladně orientovaná kružnice $|z-a| = R$, $R > 0$.

VÝSLEDKY

1. a) $\log((-1)^2) = 0 \neq 2\pi i = 2\log(-1)$, $\log((1+i)^2) = \log(2) + i\frac{\pi}{2} = 2\log(1+i)$, $\log((-i)^2) = \pi i \neq -\pi i = 2\log(-i)$
- b) $m_{ab}(z) = i \neq \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = m_a(m_b(z))$
2. a) $\frac{1+i}{2}$ b) $-\frac{\pi}{2}$ c) $\frac{1}{2}\sqrt{5}(2-i)$ d) $2i$ e) 0 f) $\frac{4}{3}$ g) $2\pi i$ pokud je $n = -1$, jinak 0

CVIČENÍ 5

1. Spočtete $\int_{\varphi} f$, pro funkce f zadané níže, kde φ je půlelipsa, která vede od $\frac{\pi}{2}$ přes $2\pi i$ do $-\frac{\pi}{2}$ a jejíž hlavní osy leží na souřadnicích osách.

a) $f(z) = (z + i)^2$ b) $f(z) = ze^{iz^2}$ c) $f(z) = z \cos z$ d) $f(z) = ze^z$

(Hint: elipsa má tvar $\varphi(t) = a \cos t + ib \sin t$)

2. a) Nalezněte primitivní funkci k $\frac{1}{z}$ na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a s pomocí primitivní funkce spočtete $\int_{\varphi_{\varepsilon}} \frac{1}{z}$ pro $\varepsilon \in (0, 1)$ a $\varphi_{\varepsilon}(t) := e^{it}$, $t \in [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$.

b) Spočtete $\int_{\varphi_0} \frac{1}{z}$ a dokažte, že $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varphi_{\varepsilon}} \frac{1}{z} = \int_{\varphi_0} \frac{1}{z}$.

c) Dokažte, že $\frac{1}{z}$ nemá primitivní funkci na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3. a) Nalezněte primitivní funkci k $\log z$ na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ a s pomocí primitivní funkce spočtete $\int_{\varphi_{\varepsilon}} \log z$ pro $\varepsilon \in (0, 1)$ a $\varphi_{\varepsilon}(t) := e^{it}$, $t \in [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon]$.

b) Spočtete $\int_{\varphi_0} \log z$ a dokažte, že $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varphi_{\varepsilon}} \log z = \int_{\varphi_0} \log z$.

c) Dokažte, že $\log z$ nemá primitivní funkci na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

4. a) Spočtete $\int_{\varphi} \frac{1}{m_{1/2}(z)}$, kde φ je polokružnice $|z| = 1$ z bodu 1 do -1 přes horní polorovinu.

b) Spočtete $\int_{\varphi} \frac{1}{m_{1/2}(z)}$, kde kladně orientovaná kružnice $|z| = 1$ z bodu -1 .

c) Dokažte, že $\frac{1}{m_{1/2}(z)}$ nemá primitivní funkci na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ a že má primitivní funkci na $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

5. Dokažte, že neexistuje holomorfní funkce L na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ splňující $e^{L(z)} = z$ pro $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(Hint: Ukažte, že by muselo platit $L'(z) = \frac{1}{z}$ a použijte Příklad 2.)

VÝSLEDKY

1. a) $\pi - \frac{\pi^3}{12}$ b) 0 c) 0 d) $2 \sinh \frac{\pi}{2} - \pi \cosh(\frac{\pi}{2})$

2. a) $2i(\pi - \varepsilon)$ b) $2\pi i$

3. a) $-2i(\pi - \varepsilon) \cos \varepsilon + 2i \sin \varepsilon$ b) -2π

4. a) $2(i - 1)$ b) $4i$

CVIČENÍ 6

1. Spočtete přírůstek logaritmu funkce $(z-1)(z+2)$ podél kladně orientovaného obvodu čtverce s vrcholy $r(1+i)$, $r(-1+i)$, $r(-1-i)$ a $r(1-i)$ v závislosti na $r > 0$.

2. Načrtněte $\langle \varphi \rangle$ a určete hodnotu indexu vzhledem k φ v jednotlivých komponentách $\mathbb{C} \setminus \langle \varphi \rangle$ pro následující křivky.

a)

$$\varphi = \psi \dot{+} \left[\frac{10}{3}\pi - \frac{i}{2}, -\frac{i}{2} \right] \dot{+} \theta \dot{+} \left[4\pi - \frac{i}{2}, 4\pi + \frac{i}{2} \right] \dot{+} \left[4\pi + \frac{i}{2}, \frac{i}{2} \right] \dot{+} \left[\frac{i}{2}, i \right],$$

kde $\psi(t) = t + i \cos t$ pro $t \in [0, \frac{10}{3}\pi]$ a $\theta(t) = t - \frac{3}{2}i + i \cos t$ pro $t \in [0, 4\pi]$

b)

$$\varphi = \psi \dot{+} [1, -3i] \dot{+} [-3i, 2i] \dot{+} \theta \dot{+} \left[\frac{8}{3}\pi + \frac{i}{2}, -1 + \frac{i}{2} \right] \dot{+} \left[-1 + \frac{i}{2}, -1 + i \right] \dot{+} [-1 + i, 2\pi + i] \dot{+} [2\pi + i, 2\pi - 3i] \dot{+} [2\pi - 3i, -1],$$

kde $\psi(t) = t + i(t^2 - 1)$ pro $t \in [-1, 1]$ a $\theta(t) = t + i(1 + \cos t)$ pro $t \in [0, \frac{8}{3}\pi]$

c)

$$\varphi = \psi \dot{+} \left[\frac{25}{6}\pi + \frac{i}{2}, -1 + \frac{i}{2} \right] \dot{+} \left[-1 + \frac{i}{2}, -1 \right] \dot{+} [-1, 6\pi] \dot{+} \theta,$$

kde $\psi(t) = t + i \sin t$ pro $t \in [0, \frac{25}{6}\pi]$ a $\theta(t) = 3\pi + 3\pi e^{-it}$ pro $t \in [0, \pi]$

VÝSLEDKY

1. 0 pro $r < 1$, $2\pi i$ pro $r \in (1, 2)$, $4\pi i$ pro $r > 2$. Pro $r \in \{1, 2\}$ není definováno.

2. Viz. výsledky zkouškových písemek z webu prof. Kalendy dostupné na odkazu
<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis>

CVIČENÍ 7

1. Spočtěte $\int_{\varphi} f$, kde

a) $f(z) = \frac{\sin(z+i)}{z^2+1}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru 2

b) $f(z) = \frac{e^z}{z^2-1}$ a φ je kladně orientovaná kružnice $|z| = 2$

c) $f(z) = \frac{e^z-e}{z^2-1}$ a φ je kladně orientovaná kružnice $|z| = 2$

d) $f(z) = \frac{e^z}{2\pi i(z^2+a^2)}$ a φ je kladně orientovaná kružnice o středu 0 a poloměru $2a$, $a > 0$

e) $f(z) = \frac{e^z}{z^2+2} - 2\bar{z}$ a φ je kladně orientovaná kružnice $|z| = 1$

f) $f(z) = \frac{z \sin z + z^2}{z+\pi}$ a φ je kladně orientovaná kružnice $|z| = 10$

VÝSLEDKY

1. a) $\pi \sin(2i) = -i\pi \sinh(2)$ b) $\pi i(e - \frac{1}{e})$ c) $\pi i(e - \frac{1}{e})$ d) $\frac{\sin a}{a}$ e) $-4\pi i$ f) $2\pi^3 i$

CVIČENÍ 9

1. Určete násobnost kořenů funkcí: a) $z^2 - z^5$, všechny kořeny b) $(1 - m_{1/2}(z))^3$, kořen 1 c) $e^{z^2} - 1$, všechny kořeny d) $1 - \cos z$, všechny kořeny e) $e^{\sin z} - e^{\operatorname{tg} z}$, kořen 0

2. U následujících funkcí nalezněte definiční obor, kořeny a jejich násobnost:

$$\text{a) } \frac{\sin(e^z)}{\cos(e^z) - 1}, \quad \text{b) } \operatorname{tg}(z^2) \cdot \sin^2(2z), \quad \text{c) } \frac{\exp(\frac{\pi i}{z}) - 1}{\cos(\pi z)}, \quad \text{d) } \frac{\exp(z^2) - 1}{(\exp(z) - 1)^2}$$

3. Spočtěte hodnotu integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 1} dx$$

(NÁVOD: Integrujte funkci $\frac{e^{iz}}{z^2+1}$ přes křivku $[-R, R] + \psi_R$, kde ψ_R je kladně orientovaná horní polokružnice o středu 0 a poloměru R . Integrujte dvěma způsoby: dokažte, že limita integrálu přes ψ_R pro $R \rightarrow \infty$ je nula a spočtěte limita integrálu přes $[-R, R]$; pro druhý způsob výpočtu použijte rozklad na parciální zlomky a Cauchyovu větu (můžete bez důkazu použít, že Cauchyova věta pro kružnici platí i pro horní půlkružnici).)

VÝSLEDKY

1. a) 0 násobnosti 2, $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ násobnosti 1 b) 3 c) 0 násobnosti 2, $\sqrt{k\pi}(\pm 1 \pm i)$ (všechny čtyři kombinace znamének), $k \in \mathbb{N}$, násobnosti 1 d) $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, všechny násobnosti 2 e) 3

2. a) definiční obor $\mathbb{C} \setminus \{\ln(2k\pi) + i\pi l : k \in \mathbb{N}, l \in \mathbb{Z}\}$, kořeny $\ln((2k-1)\pi) + i\pi l$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $l \in \mathbb{Z}$, všechny jsou násobnosti 1 b) definiční obor $\mathbb{C} \setminus \{\pm\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi}, \pm i\sqrt{\frac{\pi}{2} + k\pi} : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$, kořen 0 násobnosti 4, kořeny $k\frac{\pi}{2}$ pro $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ násobnosti 2, kořeny $\pm\sqrt{k\pi}$ a $\pm i\sqrt{k\pi}$ pro $k \in \mathbb{N}$ násobnosti 1 c) definiční obor $\mathbb{C} \setminus (\{\frac{1}{2} + k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\})$, kořeny $\frac{1}{2k}$ pro $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \pm 1\}$, všechny jsou násobnosti 1 d) definiční obor $\mathbb{C} \setminus \{2k\pi i : k \in \mathbb{Z}\}$, kořeny $\{\pm\sqrt{k\pi}(1+i), \pm\sqrt{k\pi}(1-i) : k \in \mathbb{N}\}$, všechny jsou násobnosti 1

3. $\frac{\pi}{e}$

1. Spočtěte následující Newtonovy integrály:

a) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+\cos x}$, $(a \in \mathbb{R}, |a| > 1)$ b) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\cos x)^2}$, $(a > b > 0)$

(HINT: integrály typu $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$ kde R je racionální funkce dvou proměnných, která nemá nulu ve jmenovateli je možné počítat následující metodou. Vyjádřete $\sin x$ a $\cos x$ pomocí exponenciály a podle definice křivkového integrálu převed'te na integrál přes kladně orientovanou jednotkovou kružnici. Ten spoč'tete dle reziduové věty. Je-li integrační interval kratší, použijte vhodné symetrie integrované funkce.)

2. Spoč'tete následující Newtonovy integrály: a) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^n}$, $(n \in \mathbb{N})$ b) $\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$

c) $\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$, $(a, b > 0)$

(HINT: integrály typu $\int_{-\infty}^\infty \frac{P(x)}{Q(x)} dx$ kde P, Q jsou polynomy, Q nemá kořen v $\mathbb{R}$ a $\deg Q \geq \deg P + 2$ je možné počítat následující metodou. Nejprve převed'te na integrál od $-\infty$ do ∞ pomocí symetrie. Pak integrujte přes $[-R, R] \cup \varphi_R$, kde $\varphi_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$, použijte reziduovou větu a to, že integrál přes φ_R má limitu 0 pro $R \rightarrow \infty$.)

3. Spoč'tete následující Newtonovy integrály:

a) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\sin^2 x}$, $(a, b > 0)$ b) $\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2+4x+13)^2} dx$ c) $\int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)^3} dx$, $(a > 0)$

d) $\int_0^\pi \tan(x+ia) dx$, $(a \in \mathbb{R}, a \neq 0)$

VÝSLEDKY

1. a) $\frac{2\pi \operatorname{sgn}(a)}{\sqrt{a^2-1}}$ b) $\frac{2\pi a}{(\sqrt{a^2-b^2})^3}$

2. a) $\frac{\pi}{2^{2n-1}} \binom{2n-1}{n-1}$ b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\pi}{2ab(a+b)}$

3. a) $\frac{\pi}{\sqrt{a(a+b)}}$ b) $-\frac{\pi}{27}$ c) $\frac{\pi}{16a^3}$ d) $\pi i \operatorname{sgn}(a)$