

1. Najděte dvě uniformity $\mathcal{D}_1$ a $\mathcal{D}_2$ na $\mathbb{R}$, které obě generují na $\mathbb{R}$ obvyklou topologii a přitom neexistuje unifomní homeomorfismus mezi $(\mathbb{R}, \mathcal{D}_1)$ a $(\mathbb{R}, \mathcal{D}_2)$.

2. Nechť $(X, \mathcal{U})$ je uniformní prostor. Dokažte, že pokud $(X, \mathcal{D})$ je metrizovatelný, pak $(X, \tau_{\mathcal{D}})$ je metrizovatelný a nalezněte příklad dosvědčující, že opačná implikace neplatí.

3. Uniformita zadaná systémem pokrytí: Ať X je množina. Systém $\mathcal{U}$ se nazývá *pokrývací uniformita* na množině X , pokud:

- (a) Každé $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ je pokrytí X .
- (b) Je-li $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ a $\mathcal{U}$ je zjemněním nějakého pokrytí $\mathcal{V}$, pak $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$.
- (c) Pro $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \mathcal{U}$ platí, že $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V} \in \mathcal{U}$.
- (d) Pro každé $\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ existuje $\mathcal{V} \in \mathcal{U}$, že $\mathcal{V}$ silně hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{U}$.

(Je-li X množina a $\mathcal{U}$ její pokrytí, pak systém $\mathcal{V}$ nazýváme *zjemněním $\mathcal{U}$* , pokud $\mathcal{V}$ je pokrytí X a pro každé $V \in \mathcal{V}$ existuje $U \in \mathcal{U}$, že $V \subseteq U$. Pro systém $\mathcal{S}$ podmnožin množiny X a $A \subseteq X$ definujeme $st_{\mathcal{S}}(A) = \bigcup \{S \in \mathcal{S} : S \cap A \neq \emptyset\}$. Říkáme, že pokrytí $\mathcal{U}$ *silně hvězdovitě zjemňuje $\mathcal{V}$* , pokud $\{st_{\mathcal{U}}(U) : U \in \mathcal{U}\}$ zjemňuje $\mathcal{V}$. Pro dvě pokrytí $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ definujeme jejich společné zjemnění $\mathcal{U} \wedge \mathcal{V}$ jako $\{U \cap V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$.)

Je-li $\mathcal{U}$ pokrývací uniformita, položme

$$\mathcal{D}_{\mathcal{U}} = \{D \subseteq X \times X : \exists \mathcal{U} \in \mathcal{U} : \bigcup \{U \times U : U \in \mathcal{U}\} \subseteq D\},$$

a je-li $\mathcal{D}$ uniformita, položme

$$\mathcal{U}_{\mathcal{D}} = \{\mathcal{U} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) : \exists D \in \mathcal{D} : \{D[x] : x \in X\} \text{ zjemňuje } \mathcal{U}\}.$$

Dokažte, že zobrazení $\mathcal{U} \mapsto \mathcal{D}_{\mathcal{U}}$ je bijekce mezi pokrývacími uniformitami a uniformitami, přičemž inverzní zobrazení je dáno předpisem $\mathcal{D} \mapsto \mathcal{U}_{\mathcal{D}}$.

4. Topologie na podprostoru a součinu: Dokažte, že pokud $(X, \mathcal{D})$ je uniformní prostor a $A \subset X$, pak topologie na A příslušná $\mathcal{D}|_A$ je shodná s podprostorovou topologií. Dále dokažte, že pokud $(X_i, \mathcal{D}_i)$, $i \in I$ jsou uniformní prostory, pak topologie na $\prod_I X_i$ příslušná $\mathcal{D}_{\prod_I X_i}$ je součinnová topologie.

5. Existence zúplnění: Nechť $(X, \mathcal{D})$ je T_1 uniformní prostor, kde $\mathcal{D}$ je generována systémem pseudometrik R .

- Označ $\tilde{X}_0 := \{(x_i)_{i \in I} : (x_i) \text{ je cauchyovský net}\}$. Kdykoliv $d \in R$, pak uvažuj $\tilde{d}_0 : \tilde{X}_0 \times \tilde{X}_0 \rightarrow [0, \infty)$ definované předpisem

$$\tilde{d}_0((x_i), (y_j)) := \lim_{(i,j) \in I \times J} d(x_i, y_j), \quad \text{pro } (x_i)_{i \in I} \in \tilde{X}_0 \text{ a } (y_j)_{j \in J} \in \tilde{X}_0$$

(na $I \times J$ uvažujeme uspořádání $(i, j) \leq (i', j')$ iff $i \leq i'$ a zároveň $j \leq j'$).

Dokažte, že $\tilde{d}_0$ je dobře definovaná pseudometrika na $\tilde{X}_0$.

- Pro $x \in \tilde{X}_0$ uvažujme $[x] := \{y \in \tilde{X}_0 : \tilde{d}_0(x, y) = 0 \text{ pro každé } d \in R\}$. Uvažujme na prostoru $\tilde{X} := \{[x] : x \in \tilde{X}_0\}$ systém pseudometrik $\tilde{R} := \{\tilde{d} : d \in R\}$, kde pro $d \in R$ pseudometrika $\tilde{d}$ je dána předpisem $\tilde{d}([x], [y]) := \tilde{d}_0(x, y)$. Dokažte, že $\tilde{R}$ je dobře definovaný systém pseudometrik na $\tilde{X}$ a že $(\tilde{X}, \tilde{R})$ je T_1 uniformní prostor.
- Definujme zobrazení $e : X \rightarrow \tilde{X}$ předpisem $e(x) := [x]$ (bod x ztotožňujeme s netem, který obsahuje jen jeden bod). Dokažte, že e je vnoření uniformních prostorů a že $e(X)$ je husté v $\tilde{X}$.
- Dokažte, že $\tilde{X}$ je úplný prostor.
(Hint: je dobré si nejprve uvědomit, že pokud D je hustá podmnožina uniformního prostoru M , pak M je úplný právě když každý cauchyovský net sestávající z bodů v D je konvergentní v M .)

1. Topologická grupa $H(K)$ - základy: Ať K je T_2 kompakt.

a) Dokažte, že $H(K)$ je topologická grupa.

(Symbolem $H(K)$ zde označujeme množinu všech surjektivních homeomorfismů $f : K \rightarrow K$ s grupovou operací skládání a *compact-open* topologií, tj. topologií jejíž subbáze je tvořena množinami $E[L; U] := \{f \in H(K) : f(L) \subset U\}$, kde $L \subset K$ je kompaktní a $U \subset K$ je otevřená množina.)

b) Dokažte, že pokud (K, d) je metrický kompakt, pak compact-open topologie na $H(K)$ je metrizable metrikou ρ definovanou předpisem $\rho(f, g) := \sup_{x \in K} d(f(x), g(x))$ pro $f, g \in H(K)$.

2. Topologie na grupě generovaná systémem bi-invariantních pseudometrik. Nechť G je grupa a nechť R je systém bi-invariantních pseudometrik oddělující body. Pak *topologie generovaná systémem R* je topologie τ_R , jejíž báze okolí bodu x má subbázi generovanou $\{B_\rho(x, \varepsilon) : \varepsilon > 0, \rho \in R\}$.

a) Dokažte, že pak G s topologií τ_R je T_1 topologická grupa, která je SIN.

b) Dokažte, že T_1 topologická grupa $(G, \cdot, \tau)$ je SIN, právě když existuje systém R bi-invariantních pseudometrik splňující $\tau = \tau_R$.

3. Topologické grupy, které ne/jsou SIN:

a) Uvažujme topologickou grupu $G = \{(a, b) : a > 0, b \in \mathbb{R}\}$ s grupovou operací definovanou předpisem $(a, b) \cdot (a', b') := (aa', b + ab')$ a s topologií zděděnou z $\mathbb{R}^2$. Dokažte, že G je metrizable topologická grupa, která není metrizable bi-invariantní metrikou.

(*Hint pro důkaz že není metrizable bi-invariantní metrikou: Pro spor předpokládejme, že G je metrizable bi-invariantní metrikou ρ . Ukažte, že pak existuje $\varepsilon > 0$ a $t \neq 0$ splňující $(1, t) \in B_\rho(e, \varepsilon) \subset \{(a, b) : |b| < 1\}$, odvoďte že pak $(1, at) \in B_\rho(e, \varepsilon)$ pro každé $a > 0$, z čehož dostaneme spor.)*

b) Rozhodněte a dokažte, zda metrizable topologická grupa $H([0, 1])$ je SIN.

(Definice a základní vlastnosti $H([0, 1])$ viz. příklad 1. výše).

c) Uvažujte grupu S_∞ (permutace $\mathbb{N}$ s operací skládání) s topologií bodové konvergence (tj. bazová okolí $\pi \in S_\infty$ jsou tvořena množinami $U[\pi; F] := \{\sigma : \sigma|_F = \pi|_F\}$, kde $F \subset \mathbb{N}$ jsou konečné podmnožiny). Dokažte, že pak S_∞ je metrizable topologická grupa. Rozhodněte a dokažte, zda S_∞ je SIN.

4. Uzavřené podgrupy a kvocienty $\mathbb{R}$:

Na $\mathbb{R}$ uvažujeme operaci $+$ a standardní topologii generovanou absolutní hodnotou.

a) Najděte všechny uzavřené podgrupy $\mathbb{R}$.

b) Ukažte, že každý kvocient $\mathbb{R}$ podle uzavřené podgrupy je jakožto topologická grupa isomorfní $\{0\}$, $\mathbb{R}$, nebo $\mathbb{T}$.

($\mathbb{T}$ značí kružnici $\{e^{ix} : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$ s operací $e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$ a topologií zděděnou z $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$).

5. Nalezněte příklad T_1 topologické grupy, která není T_4 .

1. Zachování parakompaktnosti:

- (a) Dokažte, že F_σ podmnožina parakompaktního prostoru je parakompaktní.
- (b) Nalezněte příklad podmnožiny parakompaktního prostoru, která není parakompaktní.
- (c) Nalezněte příklad parakompaktního prostoru X , že $X \times X$ není parakompaktní.
- (d) Dokažte, že součin parakompaktního prostoru a kompaktního T_2 prostoru je parakompaktní.
- (e) Topologický prostor se nazývá σ -kompaktní, pokud je sjednocením spočetně mnoha svých kompaktních podprostorů. Dokažte, že součin parakompaktního a σ -kompaktního $T_{3\frac{1}{2}}$ prostoru je parakompaktní.
(Uvědomte si, že jako důsledek dostaneme, že pro každý Banachův prostor X je (X^*, w^*) parakompaktní prostor, neboť (X^*, w^*) je σ -kompaktní.)
- (f) Dokažte, že $[0, \omega_1)$ je kolektivně normální ale není parakompaktní.
(*Hint:* Dokažte, že ve spočetném kompaktu je každé lokálně konečné pokrytí konečné. Z toho pak odvoďte, že každý parakompaktní prostor který je spočetně kompaktní, je už kompaktní. Jenomže $[0, \omega_1)$ je spočetně kompaktní a není kompaktní.)

2. Charakterizace parakompaktnosti s pomocí rozkladu jednotky: Dokažte, že $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor je parakompaktní právě když existuje ke každému otevřenému pokrytí X lokálně konečný rozklad jednotky podřízený tomuto pokrytí.

3. Metrické prostory se vnoří do spočetného součinu ježků: Pro množinu I definujeme *metrického ježka s I ostny* jako metrický prostor $(I \times [0, 1])/\sim$, kde $(i, x) \sim (j, y)$ iff $x = y = 0$ vybavený metrikou

$$d((i, x), (j, y)) := \begin{cases} |x - y| & i = j, \\ x + y & i \neq j. \end{cases}$$

Dokažte, že každý metrický prostor se vnoří do spočetného součinu metrických ježků.

(*Hint: zkuste se inspirovat důkazem Bingovy-Nagatovy-Smirnovovy věty*)

4. Oddělování Lipschitzovských funkcí: Necht M je metrický prostor splňující dens $M \leq 2^\omega$. Dokažte, že existuje spočetně mnoho Lipschitzovských funkcí oddělujících body M .

1. Mohutnost souvislého prostoru: a) Dokažte, že souvislý $T_{3\frac{1}{2}}$ prostor s alespoň dvěma body má mohutnost alespoň kontinuum. b) Dokažte, souvislý T_3 prostor s alespoň dvěma body je nespočetný. c) Nalezněte příklad nekonečného souvislého T_2 prostoru, který je spočetný.

(*Hint: nejprve nalezneme systém po dvou disjunktních podmnožin racionálních čísel $\mathbb{Q}_n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ splňující že každé $\mathbb{Q}_n$ je husté v $\mathbb{R}$. Pak uvažujme $X = \{\infty\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N} \cup \{0\}} \mathbb{Q}_n \times \{n\}$, kde báze okolí ∞ je tvořena množinami $\{\infty\} \cup \bigcup_{n \geq k} \mathbb{Q}_n \times \{n\}$ pro $k \in \mathbb{N}$, báze okolí (q, k) pro $q \in \mathbb{Q}_k$ a k liché je určena jako $X \cap ((q - \varepsilon, q + \varepsilon) \times \{k-, k, k + 1\})$ a báze okolí (q, k) pro $q \in \mathbb{Q}_k$ a k sudé je určena jako $X \cap ((q - \varepsilon, q + \varepsilon) \times \{k\})$. Rozmyslete si, že pak X je spočetný, T_2 a kdykoliv clopen množina $C \subset X$ obsahuje ∞ pak $C = X$.)*

2. Souvislé lineárně uspořádané topologické prostory: Dokažte, že lineárně uspořádaný topologický prostor $(X, \leq)$ je souvislý, právě když každá neprázdná shora omezená množina má supremum a $(x, y) \neq \emptyset$ pro každé $x, y \in X$.

3. Komponenty souvislosti $H([0, 1])$: Popište všechny komponenty souvislosti topologické grupy $H([0, 1])$. (Definice a základní vlastnosti $H([0, 1])$ - viz. cvičení 1 k topologickým grupám.)

4. Komponenty souvislosti $GL(n, \mathbb{R})$: Popište všechny komponenty souvislosti topologické grupy $GL(n, \mathbb{R})$.

5. Inverzní limity a příklady kontinuí: Inverzní posloupnost je posloupnost dvojic $(X_n, f_n)_{n=1}^\infty$, kde X_n jsou topologické prostory a $f_n : X_{n+1} \rightarrow X_n$ spojitá zobrazení. Inverzní limitou inverzní posloupnosti $(X_n, f_n)_{n=1}^\infty$ rozumíme následující podprostor $\lim_{\leftarrow} (X_n, f_n)$ součinu $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$:

$$\lim_{\leftarrow} (X_n, f_n) := \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : f_n(x_{n+1}) = x_n \text{ pro každé } n \in \mathbb{N}\}.$$

(Někdy také značíme jako $\lim_{\leftarrow} X_n$ nebo X_∞ , pokud je z kontextu jasné co je X_n a f_n .)

a) Dokažte že pokud jsou X_n Hausdorffovy kompakty (resp. kontinua), pak X_∞ je Hausdorffův kompakt (resp. kontinuum).

b) Najděte inverzní systém sestávající z konečných diskrétních prostorů, jehož inverzní limita je homeomorfní Cantorovu diskontinuum.

c) Inverzní posloupnost $(X_n, f_n)_{n=1}^\infty$ se nazývá *nerozložitelná*, pokud pro každé $i \in \mathbb{N}$ a každá dvě kontinua $A, B \subset X_{i+1}$, jejichž sjednocením je X_{i+1} , platí, že $f_i(A) = X_i$ nebo $f_i(B) = X_i$. Dokažte, že pokud X_n jsou kontinua a $(X_n, f_n)_{n=1}^\infty$ nerozložitelná inverzní posloupnost, pak X_∞ je nerozložitelné kontinuum.

d) Nechť $X_n = [0, 1]$ a $f_n(x) = |1 - 2x|$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že X_∞ je pak nerozložitelné kontinuum.

(*Pozn: jedná se o tzv. Knasterovo kontinuum.*)

e) Nechť $X_n = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ a $f_n(z) = z^2$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že X_∞ je pak nerozložitelné kontinuum, na kterém je možné zadefinovat operaci násobení tak, že X_∞ je také komutativní topologická grupa.

(*Pozn: jedná se o tzv. dyadický solenoid.*)

6. Silně nuldimenzionální metrické prostory: Řekneme, že metrika ρ na X je *ultrametrika*, pokud $\rho(x, y) \leq \max\{\rho(x, z), \rho(z, y)\}$ pro každé $x, y, z \in X$. V takovém případě říkáme, že (X, ρ) je *ultrametrický prostor*. Řekneme, že topologický prostor je *ultrametrizovatelný*, pokud je homeomorfní ultrametrickému prostoru. Dokažte následující.

a) Každý ultrametrický prostor je nuldimenzionální. (*Hint: otevřené koule jsou uzavřené množiny.*)

b) Prostor 2^ω je ultrametrizovatelný. Odvoďte z věty z přednášky, že separabilní metrický prostor je nuldimenzionální právě když je ultrametrizovatelný.

Další cvičení směřují k tomu, že platí analogie předchozího i pro neseparabilní prostory. Existuje příklad (dosti komplikovaný) neseparabilního metrického prostoru, který je nuldimenzionální a není silně nuldimenzionální. Ukazuje se, že správný pojem bude pojem silné nuldimenzionality.

c) Každý ultrametrický prostor je silně nuldimenzionální.

d) Silně nuldimenzionální metrický prostor je ultrametrizovatelný.

(*Hint: nejprve ukažte, že každé otevřené pokrytí má lokálně konečné zjemnění tvořené obojetnými množinami. Následně sestrojte posloupnost lokálně konečných pokrytí $\mathcal{B}_n$ sestávajících z clopen množin takových, že diametry množin z $\mathcal{B}_n$*

jsou nejvýše 2^{-n} a $\mathcal{B}_{n+1}$ zjemňuje $\mathcal{B}_n$. Ultrametricku pak definujte jako $\rho(x, y) := 2^{-n}$, kde $n = \min\{k: \exists B \in \mathcal{B}_k \text{ že } x \in B \text{ \& } y \notin B \text{ nebo } y \in B \text{ \& } x \notin B\}$. Dokažte pak, že ρ je hledaná ultrametrika.)

7. Příklad normálního podprostoru kompaktu, který je nuldimenzionální ale není silně nuldimenzionální:

a) Dokažte, že existuje rozklad $\{A_\alpha: \alpha < \omega_1\}$ intervalu $[0, 1]$ takový, že pro každé $\alpha < \omega_1$ je A_α hustá podmnožina intervalu $[0, 1]$.

b) Pro $\alpha < \omega_1$ označme $B_\alpha = \bigcup\{A_\beta: \beta \leq \alpha\}$, kde množiny A_α jsou jako výše. Buď $D \subseteq [0, 1] \times \omega_1$ definován předpisem

$$D = \{(r, \alpha): r \in B_\alpha, \alpha < \omega_1\}.$$

Dokažte, že prostor D je nuldimenzionální.

c) Necht' $D \subset [0, 1] \times [0, \omega_1]$ je jako výše. Označme $D^* := D \cup ([0, 1] \times \{\omega_1\})$. Dokažte, že D^* je normální prostor.

d) Necht' D a D^* jsou jako výše. Dokažte, že kdykoliv A, B jsou disjunktní uzavřené podmnožiny D , pak jejich uzávěry v D^* jsou také disjunktní.

e) Necht' $D \subset [0, 1] \times [0, \omega_1]$ je jako výše. S použitím všech informací výše dokažte, že D je normální prostor který je nuldimenzionální ale není silně nuldimenzionální.

Ať X je T_4 . Připomeňme, že $A \subset X$ je *zero* (resp. *cozero*) množina, pokud existuje spojitá funkce $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ splňující $A = f^{-1}(0)$ (resp. $A = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$). Řekneme, že $M \subset X$ je C^* -vnořená, pokud každá spojitá funkce $f : M \rightarrow [0, 1]$ má spojitě rozšíření na spojitou funkci $\tilde{f} : X \rightarrow [0, 1]$.

1. Dimenze podprostoru:

- S využitím předchozích cvičení najděte příklad kompaktního prostoru X a jeho normálního podprostoru M tak, že $\text{Ind } M > \text{Ind } X$ a také $\dim M > \dim X$.
- Nechť X a M jsou T_4 prostory a $M \subset X$ je C^* -vnořená. Dokažte, že pak $\dim M \leq \dim X$.
- Nechť D a D^* jsou jako v Cvičení na souvislost, Příklad 7. Dokažte, že $D \subset D^*$ je C^* -vnořená a s využitím předchozího odvoďte, že $\dim D \leq \dim D^*$.
- Nechť D a D^* jsou jako v Cvičení na souvislost, Příklad 7. Dokažte, že $\text{ind } D = 0 < 1 = \dim D \leq \text{Ind } D$. (Automaticky také dostanete $1 = \text{ind } D^* = \dim D^* = \text{Ind } D^*$.)

2. Dimenze jistých hustých podmnožin: Ať X je T_4 .

- Dokažte, že pro každé konečné otevřené pokrytí $\{G_1, \dots, G_k\}$ existují pokrytí $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_k\}$ a $\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_k\}$ taková, že $\mathcal{H}$ sestává z cozero množin, $\mathcal{E}$ sestává ze zero množin a $H_i \subset E_i \subset G_i$, $i = 1, \dots, k$.
- Dokažte, že kdykoliv $M \subset X$ je hustá C^* -vnořená, pak pro každé otevřené pokrytí $\{U_1, \dots, U_k\}$ prostoru M sestávající z cozero množin v M existuje otevřené pokrytí $\{V_1, \dots, V_k\}$ prostoru X splňující $V_i \cap M = U_i$ pro každé $i = 1, \dots, k$.
- Dokažte, že kdykoliv $M \subset X$ je hustá C^* -vnořená a normální, pak $\dim M \geq \dim X$. (S pomocí příkladu 1b) výše pak máme dokonce $\dim M = \dim X$, speciálně pak dostaneme že $\dim X = \dim \beta X$).

3. Dimenze ind může být o mnoho menší než $\dim$:

- Nechť X je separabilní metrický prostor. Dokažte, že existuje pokrytí $\{X_\alpha : \alpha < \omega_1\}$ prostoru X takové, že $X_\alpha \subset X_\beta$ pro $\alpha < \beta$ a $\dim X_\alpha \leq 0$ pro každé $\alpha < \omega_1$.
(*Hint: použijte, že $X \subset [0, 1]^\omega$ a tvrzení tak stačí dokázat pro $X = [0, 1]^\omega$. Můžete použít, že pro interval $[0, 1]$ příslušný rozklad už máme z Cvičení na souvislost, Příklad 7a.)*)
- Připomeňme, že ve Cvičení na souvislost, Příklad 7 jsme s pomocí intervalu $[0, 1]$ sestrojili normální prostor D , o kterém jsme v Příkladu 1. výše dokázali, že $\text{ind } D = 0 < 1 = \dim D$. Zkuste vymyslet, jak provést analogii této konstrukce a sestrojit tak příklad normálního prostoru D splňujícího $\text{ind } D = 0 < \infty = \dim D = \text{Ind } D$.
(*Hint: místo intervalu $[0, 1]$ v konstrukci pracujte s $[0, 1]^\omega$, to že příslušná sestrojená množina D splní $\dim D = \infty$ dokažte tak, že analogicky jako v Příkladu 1c) výše ukažete, že D je C^* -vnořené v D^* a tedy s pomocí Příkladu 2. výše ukážete, že $\dim D = \dim D^* \geq \dim [0, 1]^\omega = \infty$.*)
Poznámka: pokud bychom konstrukci provedli s $[0, 1]^n$, sestrojíme tak normální prostor D splňující $\text{ind } D = 0 < n = \dim D = \text{Ind } D$.

4. Malé induktivní dimenze v kompaktu:

- Dokažte, že pro každý T_2 kompaktní prostor X platí, že $\text{ind } X = 1$ právě když $\text{Ind } X = 1$.
- Nechť X a Y jsou T_2 kompakty splňující $\text{Ind}(X) \leq 1$ a $\text{Ind}(Y) \leq 0$. Ukažte, že pak $\text{Ind}(X \times Y) \leq 1$.
- Dokažte, že pokud T_4 prostor X je sjednocením uzavřených podmnožin A a B , pak $\text{ind}(X) \leq \text{ind}(A) + \text{ind}(B)$.
- Nechť $L_0 = [0, \omega_1) \times [0, 1)$ je lineárně uspořádaný prostor uspořádaný lexikograficky a nechť $L := L_0 \cup \{\omega_1\}$ je lineárně uspořádaný prostor, kde $x \leq \omega_1$ pro $x \in L$. Dokažte, že pokud na L uvažujeme topologii danou uspořádáním, pak L je T_2 kompaktní splňující $\dim L = \text{ind } L = \text{Ind } L = 1$. Poznámka: prostor L nazýváme *dlouhá úsečka*.

5. Dimenze $\dim$ může být menší než ind :

- Konstrukce dvou Cantorových funkcí:* Na Cantorově diskontinuu 2^ω uvažujte lexikografické uspořádání, symbolem $0 \in 2^\omega$ a $1 \in 2^\omega$ označíme největší a nejmenší prvek v lexikografickém uspořádání, pro $s \in 2^n$ označme $x_s \in 2^\omega$ bod pro který je $x_s|_{\{1, \dots, n\}} = s$ a $x_s(i) = s(n)$ pro $i \geq n$, pro $s \in 2^n$ splňující $s(n-1) = 0$ a $s(n) = 1$ označme $s^+ \in 2^n$ posloupnost danou jako $s|_{\{1, \dots, n-2\}} = s^+|_{\{1, \dots, n-2\}}$, $s^+(n-1) = 1$ a $s^+(n) = 0$ a uvažujme spočetnou podmnožinu

$D := \{x_s : s \in 2^n, n \in \mathbb{N}\}$. Najděte spojitě surjekce $h_i : 2^\omega \rightarrow [0, 1]$ pro $i = 1, 2$, pro které platí že jsou nerostoucí (tj. kdykoliv $x < y$ pak $h_i(x) \leq h_i(y)$), $h_i(x) = h_i(y)$ právě když $\{x, y\} = \{x_s, x_{s+}\}$ pro nějaké $s \in D$, $0 = h_1(0) = h_2(0)$, $1 = h_1(1) = h_2(1)$ a konečně $h_1(D) \setminus \{0, 1\}$ a $h_2(D) \setminus \{0, 1\}$ jsou disjunktní husté podmnožiny intervalu $[0, 1]$.

Nechť L je dlouhá úsečka z cvičení 4d) výše a $h_i : 2^\omega \rightarrow [0, 1]$ pro $i = 1, 2$ jsou jako výše. Uvažujme ekvivalenci E na prostoru $(L \times \{0, 1\}) \times 2^\omega$ definovanou jako xEy pokud $x = y$ nebo $x, y \in (\{(\omega_1, 0)\} \times h_1^{-1}(t)) \cup (\{(\omega_1, 1)\} \times h_2^{-1}(t))$ pro nějaké $t \in [0, 1]$. Označme jako S příslušný kvocient a $q : (L \times \{0, 1\}) \times 2^\omega \rightarrow S$ příslušné kvocientové zobrazení. Dále označme $I := q(\{(\omega_1, 0)\} \times 2^\omega)$ a $S_i := q(L \times \{i\} \times 2^\omega)$ pro $i = 0, 1$. Dokažte pak následující.

b) S je kompaktní T_2 prostor, $S = S_1 \cup S_2$, $S_1 \cap S_2 = I$, I je homeomorfní $[0, 1]$, restrikce q na $((L \setminus \{\omega_1\}) \times \{0\}) \times 2^\omega$ je homeomorfismus na $S_i \setminus I$ a topologie na I je indukována lineárním uspořádáním $q(\omega_1, 0, s) \leq q(\omega_1, 0, t)$ iff $h_1(s) \leq h_1(t)$ v $[0, 1]$.

c) Dokažte, že $\text{ind } S_1 \leq 1$ a odvoďte, že $1 = \dim S_i = \text{ind } S_i = \text{Ind } S_i = \dim S$ pro $i = 1, 2$.

d) Zvolte v S libovolné okolí G bodu $q(\omega_1, 0, 0)$ splňující $q(\omega_1, 0, 1) \notin \overline{G}$. Dokažte, že ∂G není 0-dim a odvoďte, že $\text{ind } S = 2 \leq \text{Ind } S$.

(Dostali jsme tak příklad prostoru, kde $\dim S < \text{ind } S \leq \text{Ind } S$ a navíc příklad, dovědčující se sčítací věta pro dimenze ind a Ind neplatí ani v kompaktních prostorech.)