Vybrané partie z funkcionální analýzy, LS 2021-2022
Zadání písemné části zkoušky - termín 18.5.

Příklad 1 (15 bodů)**.** Nechť je dáno zobrazení $T : \ell_1 \to c_0$ definované předpisem

$$Tx = (x_1, x_2, \tfrac{x_1}{2}, x_3, \tfrac{x_1}{3}, x_4, \tfrac{x_1}{4}, \dots, x_n, \tfrac{x_1}{n}, \dots), \qquad x \in \ell_1.$$

(1) Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor.
(2) Vyjádřete duální operátor T^* pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.
(3) Zjistěte, zda je T kompaktní operátor.

Příklad 2 (15 bodů)**.** Uvažujme Hilbertův prostor $H = L_2((0,\infty), e^{-t}\,\mathrm{d}t)$. Napište ortonormální bázi podprostoru $Y = \operatorname{span}\{1, e^{-2t}\}$ a nalezněte nejbližší bod v Y k bodu $f(t) = e^{-3t}$.

Příklad 3 (20 bodů)**.** Nechť je dáno zobrazení $T : L_1([0,1]) \to L_1([0,1])$ definované předpisem

$$Tf(t) = 4f(t) + \int_0^1 e^x f(x) e^t \,\mathrm{d}x, \qquad f \in L_1([0,1]), t \in [0,1].$$

Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor a nalezněte $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$.
(v této úloze uvažujte pouze reálné Banachovy prostory)

Nástin řešení

Příklad 1: Pro každé $x \in \ell_1$ a $n \in \mathbb{N}$ platí, že $|Tx(2n-1)| = \frac{|x_1|}{n} \to 0$ a $|Tx(2n)| = |x_{n+1}| \to 0$, tedy $Tx \in c_0$ a $\|Tx\| \leq \max\{|x_n|\colon n \in \mathbb{N}\} \leq \|x\|_1$, a protože je snadné nahlédnout, že T je lineární, podle předchozí nerovnosti je také spojité a $\|T\| \leq 1$.

S použitím reprezentací $(c_0)^* = \ell_1$ a $(\ell_1)^* = \ell_\infty$ dostáváme, že pro $T^* : \ell_1 \to \ell_\infty$ platí pro každé $y \in \ell_1$ a $x \in \ell_1$, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T^*y)_n x_n = (T^*y)(x) = y(Tx) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n (Tx)_n. \tag{1}$$

Uvědomme si nyní, že $T(e_1) = (1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \dots)$ a $T(e_k) = e_{2(k-1)}$ pro $k \geq 2$. Tedy, pokud do (1) dosadíme $x = e_k$, dostaneme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme

$$(T^*y)_k = (T^*y)(e_k) = y(Te_k) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{2n-1}}{n} & k = 1 \\ y_{2(k-1)} & k \neq 1. \end{cases}$$

Máme tak vyjádřenu k-tou souřadnici vektoru T^*y a proto dostáváme, že $T^*y = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_{2n-1}}{n}, y_2, y_4, y_6, \dots\right)$ pro $y \in \ell_1$.

Konečně, pro $k, l \geq 2$, $k \neq l$ máme $\|T(e_k) - T(e_l)\| = \|e_{2(k-1)} - e_{2(l-1)}\| = 1$ a tedy operátor T není kompaktní, neboť posloupnost $\{T(e_k)\}_{k \geq 2}$ je 1-separovaná a tedy neobsahuje cauchyovskou podposloupnost.

Příklad 2: Máme

$$\|1\|_H^2 = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^\infty = 1.$$

Označme tedy funkci, která je konstantně jedné jako f_1. Dále položme

$$\tilde{f}_2 = e^{-2t} - \langle e^{-2t}, f_1 \rangle f_1 = e^{-2t} - \int_0^\infty e^{-2t}e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-\tfrac{1}{3}e^{-3t}]_0^\infty = e^{-2t} - \tfrac{1}{3}$$

a spočtěme

$$\|\tilde{f}_2\|_H^2 = \int_0^\infty (e^{-2t} - \tfrac{1}{3})^2 e^{-t}\,\mathrm{d}t = [-\tfrac{1}{5}e^{-5t} + \tfrac{2}{9}e^{-3t} - \tfrac{1}{9}e^{-t}]_0^\infty = \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{9} = \tfrac{4}{45},$$

tedy pro $f_2 = \sqrt{\frac{45}{4}}(e^{-2t} - \frac{1}{3})$ máme, že $\{f_1, f_2\}$ je ortonormální báze prostoru Y a nejbližší bod v Y k e^{-3t} určíme s pomocí vzorce pro ortogonální projekci jako

$$\begin{aligned} P_Y(e^{-3t}) &= \langle e^{-3t}, f_1 \rangle f_1 + \langle e^{-3t}, f_2 \rangle f_2 = \int_0^\infty e^{-3x}e^{-x}\,\mathrm{d}x + \int_0^\infty e^{-3x}\sqrt{\tfrac{45}{4}}(e^{-2x} - \tfrac{1}{3})e^{-x}\,\mathrm{d}x \sqrt{\tfrac{45}{4}}(e^{-2t} - \tfrac{1}{3}) \\ &= [-\tfrac{1}{4}e^{-4x}]_0^\infty + \tfrac{45}{4}\int_0^\infty e^{-6x} - \tfrac{1}{3}e^{-4x}\,\mathrm{d}x(e^{-2t} - \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{45}{4}[-\tfrac{1}{6}e^{-6x} + \tfrac{1}{12}e^{-4x}]_0^\infty (e^{-2t} - \tfrac{1}{3}) \\ &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{45}{4}(\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{12})(e^{-2t} - \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{4} + \tfrac{45}{48}(e^{-2t} - \tfrac{1}{3}). \end{aligned}$$

Příklad 3: Operátor T můžeme napsat jako $T = 4I + S$, kde S je konečně-dimenzionální operátor daný předpisem $Sf(t) = \int_0^1 e^x f(x) e^t\,\mathrm{d}x$ (obor hodnot S je jednodimenzionální prostor generovaný funkcí e^t). Tedy, stačí určit že S je spojitý lineární operátor (pak i T je spojitý a lineerní) a spočítat $\sigma_p(S)$ a $\sigma(S)$, neboť pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ máme $\lambda I - T = (\lambda - 4)I - S$ a tedy $\sigma_p(T) = 4 + \sigma_p(S)$ a $\sigma(T) = 4 + \sigma(S)$.

Nejprve vyšetřeme, že S je spojitý operátor. Zřejmě je lineární a máme

$$\begin{aligned} \|Sf\| &= \int_0^1 |Sf(t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \int_0^1 e^x |f(x)|\,\mathrm{d}x e^t\,\mathrm{d}t \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x e^{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{t+1}\,\mathrm{d}t \|f\| \leq e^2\|f\|, \end{aligned}$$

tedy S je spojitý operátor a $\|S\| \leq e^2$.

Vyšetřeme nyní bodové spektrum operátoru S. Pro $|\lambda| \leq 5$ tak hledáme nenulové $f \in L_1([0,1])$ splňující rovnost $\lambda f = Sf$. Pokud je $\lambda = 0$ pak nenulovým řešením je například funkce $f(t) = e^{-t}(\chi_{[0,1/2]}(t) - \chi_{[1/2,1]}(t))$. Předpokládejme nyní, že $\lambda \neq 0$. Protože obor hodnot S je jednodimenzionální prostor generovaný funkcí e^t, musí být jakákoliv funkce splňující rovnici $\lambda f = Sf$ tvaru $f(t) = Ae^t$ pro nějaké $A \in \mathbb{R}$. Tedy, dostáváme

$$\lambda A e^t = Sf(t) = \int_0^1 e^x A e^x e^t\,\mathrm{d}x = \tfrac{A(e^2-1)}{2}e^t$$

a tedy funkce f je řešením rovnosti $\lambda f = Sf$ právě když $f(t) = Ae^t$, kde $\lambda A = \frac{e^2-1}{2}A$. Tedy buď $A = 0$ (pak ale f je nulová funkce), nebo $\lambda = \frac{e^2-1}{2}$. Celkem tedy $\sigma_p(S) = \{0, \frac{e^2-1}{2}\}$ a protože je operátor S konečně-dimenzionální a tedy kompaktní, máme $\sigma(S) = \{0, \frac{e^2-1}{2}\}$.

Tedy, $\sigma_p(T) = 4 + \sigma_p(S) = \{4, \frac{e^2+7}{2}\}$ a $\sigma(T) = 4 + \sigma(S) = \{4, \frac{e^2+7}{2}\}$.

Vybrané partie z funkcionální analýzy, LS 2021-2022
Zadání písemné části zkoušky - termín 30.5.

Příklad 4 (17 bodů)**.** Nechť je dáno zobrazení $T : L_1((0,\infty)) \to L_1((0,\infty), e^{-t}\,\mathrm{d}t)$ definované předpisem

$$Tf(t) = f(2t), \qquad .$$

(1) Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor.
(2) Vyjádřete duální operátor T^* pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.
(3) Zjistěte, zda T je kompaktní operátor.

Příklad 5 (11 bodů)**.** Definujme funkcionál $\varphi : C([0,3]) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(f) := f(2) - \int_0^1 f(2t)\,\mathrm{d}t, \quad f \in C([0,1]).$$

Ukažte, že $\varphi \in (C([0,1]))^*$ a určete normu $\|\varphi\|$.

Příklad 6 (22 bodů)**.** Nechť je dáno zobrazení $T : \ell_2 \to \ell_2$ definované předpisem

$$Tx = \Big(x_1 - 2x_2, x_2 - 2x_1, \frac{x_3}{2^3}, \frac{x_4}{2^4}, \dots, \frac{x_n}{2^n}, \dots\Big), \qquad x \in \ell_2.$$

Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor a nalezněte $\sigma(T)$, $\sigma_p(T)$ a pro každé $\lambda \in \sigma_p(T)$ nalezněte příslušný nenulový vlastní vektor.

Nástin řešení

Příklad 4: Pro každé $f \in L_1$ platí

$$\|Tf\| = \int_0^\infty |f(2t)|e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\infty |f(s)|e^{-s/2}\,\mathrm{d}s \le \frac{1}{2}\int_0^\infty |f(s)|\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\|f\|,$$

tedy snadno nahlédneme, že T je dobře definovaný spojitý lineární operátor a $\|T\| \le \frac{1}{2}$.

S použitím reprezentace $L_1^* = L_\infty$ dostáváme, že pro $g \in L_\infty((0,\infty), e^{-t}\,dt)$ je T^*g jediný prvek $L_\infty((0,\infty))$ splňující že pro každou $f \in L_1((0,\infty))$ platí

$$\int_0^\infty f(t)T^*g(t)\,\mathrm{d}t = T^*g(f) = g(Tf) = \int_0^\infty g(t)f(2t)e^{-t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^\infty g(\tfrac{s}{2})f(s)e^{-s/2}\,\mathrm{d}s. \tag{2}$$

A protože $|\frac{1}{2}g(s/2)e^{-s/2}| \le \frac{1}{2}|g(s/2)| \le \frac{1}{2}\|g\|$, $s \in (0,\infty)$, dostáváme, že funkce $s \mapsto \frac{1}{2}g(s/2)e^{-s/2}$ je prvkem $L_\infty((0,\infty))$ a tedy z (2) vidíme, že $T^*g(s) = \frac{1}{2}g(s/2)e^{-s/2}$.

Konečně, pro podprostor $Z = \{f \in L_1((0\infty))\colon f|_{(1,\infty)} \equiv 0\}$ dostáváme, že

$$\|Tf\| = \frac{1}{2}\int_0^\infty |f(s)|e^{-s/2}\,\mathrm{d}s \ge \frac{e^{-1/2}}{2}\int_0^1 |f(s)|\,\mathrm{d}s = \frac{e^{-1/2}}{2}\|f\|, \quad f \in Z,$$

a tedy $T|_Z$ je isomorfismus a protože Z je nekonečně-dimenzionální (protože třeba $\chi_{(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})}$, $n \in \mathbb{N}$ je nekonečná posloupnost lineárně nezávislých bodů ze Z), operátor T není kompaktní.

Příklad 5: Pro každou $f \in C([0,3])$ máme $|\varphi(f)| \le \|f\| + \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \le 2\|f\|$ a tedy snadno nahlédneme, že φ je spojitá linární funkce a $\|\varphi\| \le 2$. Navíc, pro

$$f_n(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, 2-\frac{1}{n}] \\ 1 & t \in [2,3] \\ 2n(t-2+\frac{1}{n}) - 1 & t \in [2-\frac{1}{n}, 2] \end{cases}$$

platí, že $\|f_n\| = 1$ a

$$\varphi(f) = 1 - \frac{1}{2}\int_0^2 f_n(s)\,\mathrm{d}s \ge 1 + \frac{1}{2}\Big(2 - \frac{1}{n} - \int_{2-\frac{1}{n}}^2 |f_n(s)|\,\mathrm{d}s\Big) \ge 1 + \frac{1}{2}\Big(2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n}\Big) \to 2,$$

tedy $\|\varphi\| \ge 2$ a proto celkem dostáváme, že $\|\varphi\| = 2$.

Příklad 6: Pro každé $x \in \ell_2$ platí

$$\|Tx\| = \|(x_1, x_2, 0, 0, \ldots) + -(2x_2, 2x_1, 0, 0, \ldots) + (0, 0, \tfrac{x_3}{2^3}, \ldots, \tfrac{x_n}{2^n}, \ldots)\| \le \|x\| + 2\|x\| + \|x\| \le 4\|x\|,$$

a tedy snadno nahlédneme, že T je spojitý lineární operátor a $\|T\| \le 4$.

Vyšetřeme nyní bodové spektrum. Pro $|\lambda| \le 4$ tak hledáme nenulové $x \in \ell_2$ splňující rovnost $Tx - \lambda x = 0$, tj. $x_1 - 2x_2 - \lambda x_1 = 0$, $x_2 - 2x_1 - \lambda x_2 = 0$ a $\frac{x_n}{2^n} - \lambda x_n = 0$, $n \ge 3$. Tedy, buď $\lambda \in \{2^{-n}\colon n \in \mathbb{N}, n \ge 3\}$ (pak nenulové řešení je například $x = e_n$), nebo $x_n = 0$ pro $n \ge 3$ a existuje nenulové řešení soustavy rovnic daných maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & -2 & 0 \\ 0 & (1-\lambda)^2 - 4 & 0 \end{array}\right),$$

tedy musí být $(1-\lambda)^2 - 4 = 0$, tj. $|\lambda - 1| = 2$, tj. $\lambda \in \{3, -1\}$. Celkem tedy $\sigma_p(T) = \{-1, 3, 2^{-n}\colon n \in \mathbb{N}, n \ge 3\}$. Vlastní vektor příslušný $\lambda = 2^{-n}$, $n \ge 3$ je $x = e_n$, vlastní vektor příslušný $\lambda = -1$ je například $e_1 + e_2$, vlastní vektor příslušný $\lambda = 3$ je například $e_1 - e_2$.

Zbývá určit spektrum. Víme, že $\sigma(T) \supset \overline{\sigma_p(T)} = \{0\} \cup \sigma_p(T)$. Zvolme tedy $|\lambda| \le 4$, $\lambda \notin \overline{\sigma_p(T)}$ a zkoumejme, zda je operátor $T - \lambda I$ surjektivní. Pro zadané $y \in \ell_2$ musí pro každé $n \ge 3$ platit $x_n = y_n \frac{1}{2^{-n} - \lambda}$. Dále, (x_1, x_2) musí řešit rovnici zadanou maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & -2 & y_1 \\ -2 & 1-\lambda & y_2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1-\lambda & -2 & y_1 \\ 0 & (1-\lambda)^2 - 4 & (1-\lambda)y_2 + 2y_1 \end{array}\right),$$

tedy dostáváme, že pro $\lambda = 1$ je $x_2 = -\frac{y_1}{2}$ a $x_1 = -\frac{y_2}{2}$ a pro $\lambda \ne 1$

$$x_2 = \tfrac{(1-\lambda)y_2 + 2y_1}{(1-\lambda)^2 - 4} \quad \text{a} \quad x_1 = \tfrac{1}{1-\lambda}\big(y_1 + 2\tfrac{(1-\lambda)y_2 + 2y_1}{(1-\lambda)^2 - 4}\big).$$

Takto definovaný prvek je elementem ℓ_2, neboť

$$\sum_{n=3}^\infty |x_n|^2 = \sum_{n=3}^\infty \frac{|y_n|^2}{|\lambda - 2^{-n}|} \le \sum_{n=3}^\infty \frac{|y_n|^2}{d(\lambda, \{2^{-n}\colon n \ge 3\})} < \infty.$$

Celkem tak dostáváme, že $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$.

Alternativní a výpočetně příjemnější postup by byl si uvědomit, že operátor T je kompaktní a tedy bychom dostali rovnou, že $\sigma(T) = \{0\} \cup \sigma_p(T)$.

Vybrané partie z funkcionální analýzy, LS 2021-2022
Zadání písemné části zkoušky - termín 8.6.

Příklad 7 (20 bodů)**.** Nechť je dáno zobrazení $T : L_1([2,\infty)) \to c_0$ definované předpisem
$$Tf = \Big(\int_2^\infty f(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t \Big)_{n=1}^\infty, \qquad .$$

(1) Dokažte, že $Tf \in c_0$ pro $f \in L_1([2,\infty))$ a že T je spojitý lineární operátor.
(2) Vyjádřete duální operátor T^* pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.
(3) Zjistěte, zda je T kompaktní operátor.

Příklad 8 (15 bodů)**.** Označme $\zeta(\alpha) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in (1,\infty)$. Za pomocí funkce ζ vyjádřete nějakou ortonormální bázi podprostoru
$$Y = \operatorname{span}\Big\{ \big(\tfrac{1}{n}\big)_{n=1}^\infty, \big(\tfrac{1}{n^2}\big)_{n=1}^\infty \Big\} \subset \ell_2$$
a nalezněte nejbližší bod v Y k bodu $x_0 = (\frac{1}{n^3})_{n=1}^\infty$.

Příklad 9 (15 bodů)**.** Nechť je dáno zobrazení $T : C([0,2]) \to C([0,2])$ definované předpisem
$$Tf(t) = \max\{t, t^2\} f(t), \qquad f \in C([0,2]), t \in [0,2].$$
Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor a nalezněte $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$.

Nástin řešení

Příklad 7: Pro $f \in L_1([2,\infty))$ a $n \in \mathbb{N}$ platí

$$|Tf(n)| \leq \int_2^\infty |f(t)|e^{-2n}\,\mathrm{d}t \leq e^{-2n}\|f\|_1 \to 0. \tag{3}$$

Tedy, $Tf \in c_0$ a dále je z výpočtu výše snadno vidět, že T je spojitý linární operátor a $\|T\| \leq e^{-2}$.

S použitím reprezentace $L_1^* = L_\infty$ a $(c_0)^* = \ell_1$ dostáváme, že pro $x \in \ell_1$ je T^*x jediný prvek $L_\infty([2,\infty))$ splňující, že pro každou $f \in L_1([2,\infty))$ platí

$$\int_2^\infty T^*x(t)f(t)\,\mathrm{d}t = T^*x(f) = x(Tf) = \sum_{n=1}^\infty x_n \int_2^\infty f(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t = \int_2^\infty f(t)\sum_{n=1}^\infty x_n e^{-nt}\,\mathrm{d}t,$$

kde v poslední rovnosti jsme prohodili sumu a integrál, což je možné z Lebesgueovy věty, neboť integrovatelná majoranta je dána odhadem

$$|\sum_{n=1}^\infty x_n e^{-nt}| \leq \sum_{n=1}^\infty |x_n|e^{-t} = \|x\|_1 \cdot e^{-t} \in L_1([2,\infty)). \tag{4}$$

Dále je z odhadu (4) vidět, že $|\sum_{n=1}^\infty x_n e^{-nt}| \leq e^{-2}\|x\|_1$, $t \geq 2$ a tedy se jedná o bodově konvergentní sumu, která dobře definuje funkci z $L_\infty([2,\infty))$. Celkem dostáváme, že $T^*x(t) = \sum_{n=1}^\infty x_n e^{-nt}$.

Pro vyšetření kompaktnosti uvažujme konečně-dimenzionální operátor $T_N : L_1([2,\infty)) \to c_0$ daný předpisem

$$T_N f = \Big(\int_2^\infty f(t)e^{-nt}\,\mathrm{d}t\Big)_{n=1}^N.$$

Podobně jako výše z odhadu (3) snadno zjistíme, že se jedná o spojitý linární operátor. Dále pro $f \in L_1([2,\infty))$ platí (používáme zase odhad (3))

$$\|(T-T_N)f\| = \sup_{n>N}|Tf(n)| \leq \sup_{n>N} e^{-2n}\|f\|_1 \leq e^{-2(N+1)}\|f\|_1,$$

tedy $\|T - T_N\| \leq e^{-2(N+1)} \to 0$. Operátor T je tedy kompaktní. Alternativně se dalo spočítat, že T^* je kompaktní (T^* jsme určili výše), což by bylo trochu bližší úlohám počítaným na cvičení (operátor T^* by se zase aproximoval konečně-dimenzionálními operátory T_N).

Příklad 8: Máme $\|(\frac{1}{n})\|_2 = \sqrt{\zeta(2)}$. Označme tedy posloupnost $\big(\frac{1}{n\sqrt{\zeta(2)}}\big)_{n=1}^\infty \in \ell_2$ jako f_1. Dále položme

$$\widetilde{f_2} = \Big(\frac{1}{n^2}\Big)_{n=1}^\infty - \langle\Big(\frac{1}{n^2}\Big)_{n=1}^\infty, f_1\rangle f_1 = \Big(\frac{1}{n^2}\Big)_{n=1}^\infty - \frac{1}{\zeta(2)}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}\Big(\frac{1}{n}\Big)_{n=1}^\infty = \Big(\frac{1}{n^2} - \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)n}\Big)_{n=1}^\infty$$

a spočtěme

$$\|\widetilde{f_2}\|_2^2 = \sum_{n=1}^\infty \Big|\frac{1}{n^2} - \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)n}\Big|^2 = \zeta(4) - \frac{2\zeta(3)^2}{\zeta(2)} + \frac{\zeta(3)^2}{\zeta(2)} = \frac{\zeta(4)\zeta(2) - \zeta(3)^2}{\zeta(2)},$$

tedy pro $f_2 = \frac{\widetilde{f_2}}{\|\widetilde{f_2}\|_2}$ máme, že $\{f_1, f_2\}$ je ortonormální báze prostoru Y a nejbližší bod v Y k x_0 určíme s pomocí vzorce pro ortogonální projekci jako

$$\begin{aligned}
P_Y(x_0) &= \langle x_0, f_1\rangle f_1 + \langle x_0, f_2\rangle f_2 = \frac{1}{\zeta(2)}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^4}\Big(\frac{1}{n}\Big)_{n=1}^\infty + \frac{1}{\|\widetilde{f_2}\|_2^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^3}\Big(\frac{1}{n^2} - \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)n}\Big)\Big(\frac{1}{n^2} - \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)n}\Big)_{n=1}^\infty \\
&= \frac{\zeta(4)}{\zeta(2)}\Big(\frac{1}{n}\Big)_{n=1}^\infty + \frac{\zeta(2)}{\zeta(4)\zeta(2) - \zeta(3)^2}\Big(\zeta(5) - \frac{\zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(2)}\Big)\Big(\frac{1}{n^2} - \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)n}\Big)_{n=1}^\infty \\
&= \Big(\frac{\zeta(4)}{\zeta(2)}\frac{1}{n} + \frac{\zeta(5)\zeta(2) - \zeta(3)\zeta(4)}{\zeta(4)\zeta(2) - \zeta(3)^2}\Big(\frac{1}{n^2} - \frac{\zeta(3)}{\zeta(2)n}\Big)\Big)_{n=1}^\infty.
\end{aligned}$$

Příklad 9: Pro každé $f \in C([0,2])$ platí $\|Tf\|_\infty \leq \|\max\{t,t^2\}\|_\infty \cdot \|f\|_\infty = 4\|f\|_\infty$ a tedy snadno nahlédneme, že T je spojitý lineární operátor a $\|T\| \leq 4$.

Vyšetřeme nyní bodové spektrum. Pro $|\lambda| \leq 4$ tak hledáme nenulové $f \in C([0,2])$ splňující rovnost $\lambda f(t) = Tf(t) = \max\{t,t^2\}f(t)$. Pak ve všech bodech kde $f(t) \neq 0$ musí platit $\lambda = \max\{t,t^2\}$, tedy $\max\{t,t^2\}$ musí být konstatní na množině $\{t\colon f(t) \neq 0\}$. Protože ale nenulová spojitá funkce má nekonečně mnoho bodů kde není rovna nule, dostáváme celkem že $\sigma_p(T) = \emptyset$.

Zbývá vyšetřit spektrum. Pro $|\lambda| \leq 4$ chceme zjistit, zda je $\lambda I - T$ surjektivní, tedy pro která $g \in C([0,2])$ existuje $f \in C([0,2])$ splňující

$$(\lambda - \max\{t,t^2\})f(t) = g(t), \quad t \in [0,2]. \tag{5}$$

Uvědomme si, že obor hodnot funkce $\max\{t,t^2\}$ je roven $[0,4]$ a tedy, pokud $\lambda \notin [0,4]$, pak hledaná spojitá funkce f je dána předpisem $f(t) = \frac{g(t)}{\lambda - \max\{t,t^2\}}$, tedy dostáváme, že $\sigma(T) \subset [0,4]$. Naopak, pokud je $\lambda \in [0,4]$, pak exituje $t \in [0,2]$ že $\lambda = \max\{t,t^2\}$ a tedy pro funkci $g(t) = 1$, $t \in [0,2]$ rovnost (5) nastat nemůže. Tedy $[0,4] \subset \sigma(T)$. Celkem $\sigma(T) = [0,4]$.

Vybrané partie z funkcionální analýzy, LS 2021-2022
Zadání písemné části zkoušky - termín 15.6.

Příklad 10 (17 bodů). Nechť je dáno zobrazení $T : \ell_2 \to \ell_1$ definované předpisem

$$Tx = \Big(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{2^n}\Big)_{n=1}^{\infty}, \qquad x \in \ell_2.$$

(1) Dokažte, že $Tx \in \ell_1$ pro $x \in \ell_2$ a že T je spojitý lineární operátor.
(2) Vyjádřete duální operátor T^* pomocí reprezentace duálů klasických prostorů.
(3) Zjistěte, zda je T kompaktní operátor.

Příklad 11 (13 bodů). Definujme funkcionál $\varphi : L_\infty([1, \infty)) \to \mathbb{R}$ předpisem

$$\varphi(f) := \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{(-1)^n}{n^2} f(t)\,\mathrm{d}t, \quad f \in L_\infty([0, \infty)).$$

(1) Ukažte, že $\varphi \in (L_\infty([1, \infty)))^*$ a určete normu $\|\varphi\|$.
(2) Nalezněte funkce $f_n \in L_\infty([1, \infty))$, $n \in \mathbb{N}$ spňující, že $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ je nekonečná a lineárně nezávislá podmnožina $\ker \varphi$.

Příklad 12 (20 bodů). Nechť je dáno zobrazení $T : C([0, 2]) \to C([0, 2])$ definované předpisem

$$Tf(t) = 3f(t) - f(1) + \int_0^2 txf(x)\,\mathrm{d}x, \qquad f \in C([0, 2]), t \in [0, 2].$$

Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor a nalezněte $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$.
(v této úloze uvažujte pouze reálné Banachovy prostory)

Nástin řešení

Příklad 10: Pro $x \in \ell_2$ a $n \in \mathbb{N}$ s použitím Hölderovy nerovnosti dostáváme

$$|Tx(n)| \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|}{2^n} \leq \|x\|_2 \cdot \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2}}{2^n} = \|x\|_2 \cdot \frac{\sqrt{n}}{2^n}, \tag{6}$$

a protože suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$ je konvergentní (například dle odmocninového kritéria), dostáváme, že $Tx \in \ell_1$ a $\|Tx\| \leq \|x\|_2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$. Snadno tak nahlédneme, že T je spojitý lineární operátor a $\|T\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$.

S použitím reprezentací $(\ell_2)^* = \ell_2$ a $(\ell_1)^* = \ell_\infty$ dostáváme, že pro $T^* : \ell_\infty \to \ell_2$ platí pro každé $y \in \ell_\infty$ a $x \in \ell_2$, že

$$\sum_{n=1}^{\infty} (T^*y)_n x_n = (T^*y)(x) = y(Tx) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n (Tx)_n. \tag{7}$$

Uvědomme si nyní, že $T(e_k) = (0, \ldots, 0, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{k+1}}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots)$. Tedy, pokud do (7) dosadíme $x = e_k$, dostaneme, že pro každé $k \in \mathbb{N}$ máme

$$(T^*y)_k = (T^*y)(e_k) = y(Te_k) = \sum_{n=k}^{\infty} \tfrac{y_n}{2^n}.$$

Máme tak vyjádřenu k-tou souřadnici vektoru T^*y a proto dostáváme, že $T^*y = \Big(\sum_{n=k}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} \Big)_{k=1}^{\infty}$ pro $y \in \ell_\infty$.

Pro vyšetření kompaktnosti uvažujme konečně-dimenzionální operátor $T_N : \ell_2 \to \ell_1$ daný předpisem

$$T_N f = \Big(\frac{x_1 + \ldots + x_n}{2^n} \Big)_{n=1}^{N}.$$

Podobně jako výše z odhadu (6) snadno zjistíme, že se jedná o spojitý linární operátor. Dále pro $x \in \ell_2$ platí (používáme zase odhad (6))

$$\|(T - T_N)x\| = \sum_{n=N+1} |Tx(n)| \leq \|x\|_2 \sum_{n=N+1} \frac{\sqrt{n}}{2^n},$$

tedy $\|T - T_N\| \leq \sum_{n=N+1} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Operátor T je tedy kompaktní.

Příklad 11: Pro každou $f \in L_\infty([1,\infty))$ máme $|\varphi(f)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|f\|_\infty \int_n^{n+1} \frac{1}{n^2} \leq \|f\|_\infty \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ a tedy snadno nahlédneme, že φ je spojitá linární funkce a $\|\varphi\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Navíc, pro $f = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \chi_{(n,n+1)}$ platí, že $\|f\|_\infty = 1$ a

$$\varphi(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

tedy $\|\varphi\| \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ a proto celkem dostáváme, že $\|\varphi\| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Konečně, funkce $f_n = n^2(\chi_{(n,n+1/2)} - \chi_{(n+1/2,n+1)})$ splňují že $\varphi(f_n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$ a $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ je zřejmě lineárně nezávislá množina.

Příklad 12: Operátor T můžeme napsat jako $T = 3I + S$, kde S je konečně-dimenzionální operátor daný předpisem $Sf(t) = -f(1) + \int_0^2 txf(x)\,\mathrm{d}x$ (obor hodnot S je dvoudimenzionální prostor generovaný funkcemi 1 a t). Tedy, stačí určit že S je spojitý lineární operátor (pak i T je spojitý a lineérní) a spočítat $\sigma_p(S)$ a $\sigma(S)$, neboť pro každé $\lambda \in \mathbb{K}$ máme $\lambda I - T = (\lambda - 3)I - S$ a tedy $\sigma_p(T) = 3 + \sigma_p(S)$ a $\sigma(T) = 3 + \sigma(S)$.

Nejprve vyšetřeme, že S je spojitý operátor. Zřejmě je lineární pro $f \in C([0,2])$ a $t \in [0,2]$ máme

$$|Sf(t)| \leq \|f\| + \|f\| \int_0^2 |tx|\,\mathrm{d}x \leq \|f\| + 2\|f\| \int_0^2 x\,\mathrm{d}x = 5\|f\|,$$

tedy S je spojitý operátor a $\|S\| \leq 5$.

Vyšetřeme nyní bodové spektrum operátoru S. Pro $|\lambda| \leq 5$ tak hledáme nenulové $f \in C([0,2])$ splňující rovnost $\lambda f = Sf$. Pokud je $\lambda = 0$ pak nenulovým řešením je libovolná $f \in C([0,2]) \setminus \{0\}$ splňující $f(1) = 0$ a $\int_0^2 xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$, například funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0,1] \\ D(1-x), & x \in [1,2] \end{cases}$$

pro vhodnou konstantu D (výpočtem snadno zjistíme, že $D = -\frac{1}{7}$). Předpokládejme nyní, že $\lambda \neq 0$. Protože obor hodnot S je dvoudimenzionální prostor generovaný funkcemi 1 a t, musí být jakákoliv funkce splňující rovnici $\lambda f = Sf$ tvaru $f(t) = A + Bt$ pro nějaká $A, B \in \mathbb{R}$. Tedy, dostáváme

$$\lambda(A + Bt) = Sf(t) = -A - B + \int_0^2 tx(A + Bx)\,\mathrm{d}x = -A - B + t(2A + \frac{8}{3}B)$$

a tedy $A\lambda = -A - B$ a $B\lambda = 2A + \frac{8}{3}B$. Z první rovnice tak dostáváme $A = -\frac{B}{1+\lambda}$ a dosazením do druhé rovnice $B\lambda = B(-\frac{2}{1+\lambda} + \frac{8}{3})$, tedy buď $B = 0$ (pak ale $f = 0$), nebo $\lambda = -\frac{2}{1+\lambda} + \frac{8}{3}$, tj. po úpravě $3\lambda^2 - 5\lambda - 2 = 0$ a po vyřešení kvadratické rovnice dostaneme $\lambda \in \{2, -\frac{1}{3}\}$.Celkem tedy $\sigma_p(S) = \{0, 2, -\frac{1}{3}\}$ a protože je operátor S konečně-dimenzionální a tedy kompaktní, máme $\sigma(S) = \{0, 2, -\frac{1}{3}\}$.

Tedy, $\sigma_p(T) = 3 + \sigma_p(S) = \{3, 5, \frac{8}{3}\}$ a $\sigma(T) = 3 + \sigma(S) = \{3, 5, \frac{8}{3}\}$.

Vybrané partie z funkcionální analýzy, LS 2021-2022
Zadání písemné části zkoušky - termín 5.9.

Příklad 13 (17 bodů)**.** Nechť je dáno zobrazení $T : C([2,4]) \to C([1,2])$ definované předpisem

$$Tf(t) = \int_1^2 \log(s+t) f(2s)\,\mathrm{d}s, \qquad f \in C([2,4]), t \in [1,2].$$

(1) Dokažte, že $Tf \in C([1,2])$ pro $f \in C([2,4])$ a že T je spojitý lineární operátor.
(2) Pomocí reprezentace duálů klasických prostorů vyjádřete $T^*\delta_{3/2}$ (kde $\delta_{3/2}$ je Diracova míra v bodě 3/2) .
(3) Zjistěte, zda je T kompaktní operátor.

Příklad 14 (13 bodů)**.** Uvažujme Hilbertův prostor $H = L_2([0,1], t\,\mathrm{d}t)$. Napište ortonormální bázi podprostoru $Y = \mathrm{span}\{1, t^2\}$ a nalezněte nejbližší bod v Y k bodu $f(t) = t$.

Příklad 15 (20 bodů)**.** Nechť je dáno zobrazení $T : c_0 \to c_0$ definované předpisem

$$Tx = (x_3, 2x_2, 3x_1, \ldots, x_{3n}, 2x_{3n-1}, 3x_{3n-2}, \ldots), \qquad x \in c_0.$$

Dokažte, že se jedná o spojitý lineární operátor a nalezněte $\sigma(T)$ a $\sigma_p(T)$.

Nástin řešení

Příklad 13: Zvolme $f \in C([2,4])$. Pak Tf je spojitá funkce podle Věty o integrálu závislém na parametru (integrovatelná majoranta existuje, protože $|\log(s+t)f(2s)| \leq \log(s+2)|f(2s)| \in L_1([1,2])$ pro každé $t \in [1,2]$). Zároveň

$$\|Tf\|_\infty \leq \int_1^2 \log(s+2)|f(2s)|\,\mathrm{d}s \leq \|f\|_\infty \int_1^2 \log(4)\,\mathrm{d}s = \log(4)\|f\|_\infty,$$

tedy snadno nahlédneme, že T je spojitý lineární operátor a $\|T\| \leq \log 4$.

S použitím reprezentací $C([2,4])^* = M([2,4])$ a $C([1,2])^* = M([1,2])$ dostáváme, že $T^*\delta_{3/2}$ jediný prvek $M([2,4])$ splňující, že pro každou $f \in C([2,4])$ platí

$$\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}T^*\delta_{3/2}(x) = T^*\delta_{3/2}(f) = \delta_{3/2}(Tf) = Tf(3/2) = \int_1^2 \log(s+\tfrac{3}{2})f(2s)\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\int_2^4 \log(\tfrac{x+3}{2})f(x)\,\mathrm{d}x,$$

tedy pokud budeme uvažovat funkci $g(x) = \frac{1}{2}\log(\frac{x+3}{2})$, $x \in [2,4]$, pak $T^*\delta_{3/2} = g\,\mathrm{d}\lambda$ (tj. $T^*\delta_{3/2}$ je míra s hustotou g vzhledem k Lebesgueově míře λ).

Pro vyšetření kompaktnosti zvolme $f \in B_{C([2,4])}$. Pak, díky tomu že log je $\frac{1}{2}$-Lipschitzovská funkce na $[2,4]$ (protože $|(\log t)'| = \frac{1}{t} \leq \frac{1}{2}$ na $[2,4]$), pro $t, t' \in [1,2]$ máme

$$|Tf(t) - Tf(t')| \leq \int_1^2 \big|\log(s+t) - \log(s+t')\big||f(2s)|\,\mathrm{d}s \leq \int_1^2 \tfrac{1}{2}\big|t-t'\big| \cdot 1\,\mathrm{d}s \leq \tfrac{1}{2}|t-t'|,$$

a tedy funkce Tf je $\frac{1}{2}$-Lipschitzovská. Dle Arzela-Ascoliho věty (protože už víme, že $TB_{C([2,4])}$ je omezená množina) je tedy $TB_{C([2,4])}$ relativně kompaktní množina a proto T je kompaktní operátor.

Příklad 14: Máme

$$\|1\|_H^2 = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}.$$

Označme tedy funkci, která je rovna konstantně $\sqrt{2}$ jako f_1. Dále položme

$$\tilde{f}_2 = t^2 - \langle t^2, f_1\rangle f_1 = t^2 - 2\int_0^1 t^2 t\,\mathrm{d}t = t^2 - \frac{1}{2}$$

a spočtěme

$$\|\tilde{f}_2\|_H^2 = \int_0^1 (t^2 - \frac{1}{2})^2 t\,\mathrm{d}t = [\tfrac{t^6}{6} - \tfrac{t^4}{4} + \tfrac{1}{8}]_0^1 = \tfrac{4-6+3}{24} = \tfrac{1}{24},$$

tedy pro $f_2 = \sqrt{24}(t^2 - \frac{1}{2})$ máme, že $\{f_1, f_2\}$ je ortonormální báze prostoru Y a nejbližší bod v Y k t určíme s pomocí vzorce pro ortogonální projekci jako

$$\begin{aligned} P_Y(t) &= \langle t, f_1\rangle f_1 + \langle t, f_2\rangle f_2 = 2\int_0^1 x \cdot x\,\mathrm{d}x + 24\int_0^1 x(x^2 - \tfrac{1}{2})x\,\mathrm{d}x(t^2 - \tfrac{1}{2}) \\ &= \frac{2}{3} + 24\int_0^1 (x^4 - \tfrac{1}{2}x^2)\,\mathrm{d}x(t^2 - \tfrac{1}{2}) = \frac{2}{3} + \frac{24}{30}(t^2 - \tfrac{1}{2}) = \frac{4}{5}t^2 + \frac{4}{15}. \end{aligned}$$

Příklad 15: Pro každé $x \in c_0$ platí

$$\|Tx\| \leq 3\|x\|,$$

a tedy snadno nahlédneme, že T je spojitý lineární operátor a $\|T\| \leq 3$.

Vyšetřeme nyní bodové spektrum. Pro $|\lambda| \leq 3$ tak hledáme nenulové $x \in c_0$ splňující rovnost $Tx - \lambda x = 0$, tj. $x_{3n} - \lambda x_{3n-2} = 0$, $2x_{3n-1} - \lambda x_{3n-1} = 0$ a $3x_{3n-2} - \lambda x_{3n} = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Tedy, buď $\lambda = 2$ (pak nenulové řešení je například $x = e_2$), nebo $x_{3n-1} = 0$ pro $n \in \mathbb{N}$ a existuje nenulové řešení soustavy rovnic daných maticí

$$\left(\begin{array}{cc|c} -\lambda & 1 & 0 \\ 3 & -\lambda & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} -\lambda & 1 & 0 \\ 3-\lambda^2 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

tedy musí být $3 - \lambda^2 = 0$, tj. $\lambda \in \{\pm\sqrt{3}\}$. Celkem tedy $\sigma_p(T) = \{2, \pm\sqrt{3}\}$. Vlastní vektor příslušný $\lambda = \pm\sqrt{3}$ je například $x = e_1 \pm \sqrt{3}e_3$.

Zbývá určit spektrum. Víme, že $\sigma(T) \supset \sigma_p(T) = \{2, \pm\sqrt{3}\}$. Zvolme tedy $|\lambda| \leq 3$, $\lambda \notin \{2, \pm\sqrt{3}\}$ a zkoumejme, zda je operátor $T - \lambda I$ surjektivní. Pro zadané $y \in c_0$ musí pro každé $n \in \mathbb{N}$ $(x_{3n-2}, x_{3n-1}, x_{3n})$ řešit rovnici zadanou maticí

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\lambda & 0 & 1 & y_{3n-2} \\ 0 & 2-\lambda & 0 & y_{3n-1} \\ 3 & 0 & -\lambda & y_{3n} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -\lambda & 0 & 1 & y_{3n-2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{y_{3n-1}}{2-\lambda} \\ 3-\lambda^2 & 0 & 0 & \lambda y_{3n-2} + y_{3n} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & \frac{3}{3-\lambda^2}y_{3n-2} + \frac{\lambda}{3-\lambda^2}y_{3n} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{y_{3n-1}}{2-\lambda} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{\lambda}{3-\lambda^2}y_{3n-2} + \frac{1}{3-\lambda^2}y_{3n} \end{array}\right),$$

tedy dostáváme, že $x_{3n-2} = \frac{3}{3-\lambda^2}y_{3n-2} + \frac{\lambda}{3-\lambda^2}y_{3n}$, $x_{3n-1} = \frac{y_{3n-1}}{2-\lambda}$ a $x_{3n} = \frac{3}{3-\lambda^2}y_{3n-2} + \frac{\lambda}{3-\lambda^2}y_{3n}$ pro $n \in \mathbb{N}$. Je lehké si uvědomit, že takto definovaný prvek je opravdu prvkem c_0. Celkem tak dostáváme, že $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.