I. Banachovy a Hilbertovy prostory

1. Základní vlastnosti

$\mathbb{K}$ je $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$

Definice 1. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkci $\|\cdot\|\colon X \to [0, \infty)$ nazýváme *normou* na X, pokud

(i) $\|x\| = 0$ právě tehdy, když $x = 0$,

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pro všechna $x, y \in X$,

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$ pro všechna $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Dvojici $(X, \|\cdot\|)$ nazýváme *normovaným lineárním prostorem*.

Tvrzení 2. *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$.*

(a) Funkce $\rho(x, y) = \|x - y\|$ pro $x, y \in X$ je translačně invariantní metrika na X.

(b) Norma je 1-lipschitzovská (a tedy spojitá) funkce na X.

(c) Zobrazení $+\colon X \times X \to X$ a $\cdot\colon \mathbb{K} \times X \to X$ jsou spojitá.

- Uzavřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $B_X(x, r)$, tj. $B_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| \leq r\}$.
- Otevřenou kouli o středu $x \in X$ a poloměru $r > 0$ budeme značit $U_X(x, r)$, tj. $U_X(x, r) = \{y \in X;\ \|x - y\| < r\}$.
- Množina $B_X = B_X(0, 1)$ se nazývá jednotková koule v X.
- Množina $U_X = U_X(0, 1)$ se nazývá otevřená jednotková koule v X.
- Množina $S_X = \{x \in X;\ \|x\| = 1\}$ se nazývá jednotková sféra.

Definice 3. *Banachův prostor* je normovaný lineární prostor, který je úplný v metrice dané normou.

Tvrzení 4. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Je-li Y Banachův, pak Y je uzavřený v X.

(b) Je-li X Banachův, pak Y je Banachův, právě když Y je uzavřený v X.

Příklad 5. Na přednášce byly dále zmíněny tyto příklady Banachových prostorů ($p \in [1, \infty]$):

$$(\mathbb{K}, \|\cdot\|_p);\ L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu; \mathbb{K});\ \ell_p(I)\ \ C(K); c; c_0.$$

Konec 1. přednášky

Příklad 6. Další příklady Banachových prostorů:

c_{00} (je normovaný lineární, není Banachův); $c_0(I)$ (a ještě orientačně: $C^1([0, 1])$, $\mathcal{M}(K)$).

Definice 7 (ekvivalentní normy)**.** Nechť X je vektorový prostor a $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X. Řekneme, že normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou *ekvivalentní*, pokud existují $A, B > 0$ takové, že pro každé $x \in X$ platí $A\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq B\|x\|_2$.

Věta 8. *Na konečněrozměrném vektorovém prostoru jsou všechny normy ekvivalentní.*

Lemma 9. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X, $B_1 = B_{(X, \|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X, \|\cdot\|_2)}$ a $a, b > 0$. Pak $a\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ pro každé $x \in X$, právě když $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$. Speciálně, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2$ právě tehdy, když $B_1 = B_2$.*

Tvrzení 10. *Nechť X je vektorový prostor, $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou normy na X a $B_1 = B_{(X, \|\cdot\|_1)}$, $B_2 = B_{(X, \|\cdot\|_2)}$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Normy $\|\cdot\|_1$ a $\|\cdot\|_2$ jsou ekvivalentní.

(ii) Existují $a, b > 0$ taková, že $aB_1 \subset B_2 \subset bB_1$.

(iii) Zobrazení Id: $(X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ je homeomorfismus.

(iv) Otevřené množiny v $(X, \|\cdot\|_1)$ splývají s otevřenými množinami v $(X, \|\cdot\|_2)$.

(v) $\|x_n - x\|_1 \to 0$, právě když $\|x_n - x\|_2 \to 0$ pro $\{x_n\} \subset X$, $x \in X$.

Definice 11. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je *konvexní*, pokud pro každé $x, y \in M$ a $\lambda \in [0, 1]$ platí, že $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Nechť $x_1, \dots, x_n \in X$. Řekneme, že $x \in X$ je *konvexní kombinací* vektorů $x_1, \dots, x_n$ s koeficienty $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, jestliže $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ a platí, že $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$ a $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

Fakt 12. *Koule v normovaném lineárním prostoru jsou konvexní množiny.*

Definice 13. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. *Konvexním obalem* M nazveme množinu $\operatorname{conv} M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je konvexní}\}$.

Tvrzení 14. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X$. Pak*

$$\operatorname{conv} M = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i;\ x_1, \dots, x_n \in M, \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Definice 15. Nechť X je vektorový prostor. Řekneme, že množina $M \subset X$ je symetrická, pokud $-M = M$.

Fakt 16. *Nechť M je symetrická konvexní podmnožina normovaného lineárního prostoru X, která obsahuje $U(x, r)$, resp. $B(x, r)$ pro nějaké $x \in X$. Pak $U(0, r) \subset M$, resp. $B(0, r) \subset M$.*

Definice 17. Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak definujeme *uzavřený lineární obal* M jako $\overline{\operatorname{span}} M = \bigcap\{Y \supset M;\ Y \text{ uzavřený podprostor } X\}$ a *uzavřený konvexní obal* M jako $\overline{\operatorname{conv}} M = \bigcap\{C \supset M;\ C \subset X \text{ je uzavřená konvexní}\}$.

Fakt 18. *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $C \subset X$ je konvexní. Pak $\overline{Y}$ je podprostor X a $\overline{C}$ je konvexní množina.*

Tvrzení 19. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $M \subset X$. Pak $\overline{\operatorname{span}} M = \overline{\operatorname{span} M}$ a $\overline{\operatorname{conv}} M = \overline{\operatorname{conv} M}$.*

Věta 20. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $Y \subset X$ uzavřený podprostor a $Z \subset X$ konečněrozměrný podprostor. Pak $\operatorname{span}(Y \cup Z)$ je uzavřený.*

Důsledek 21. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.*

Konec 2. přednášky

2. Řady v normovaných lineárních prostorech

Definice 22. Nechť $\{x_n\} \subset X$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *konverguje* k $x \in X$, pokud $x = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N x_n$. Řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je konvergentní, pokud existuje $x \in X$ tak, že $x = \sum_{n=1}^\infty x_n$. Řada je *absolutně konvergentní*, pokud $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < +\infty$.

Fakt 23. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $\sum_{n=1}^\infty x_n$ je konvergentní řada v X. Pak*

$$\left\| \sum_{n=1}^\infty x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^\infty \|x_n\|.$$

Věta 24 (Test úplnosti)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak X je Banachův, právě když každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.*

Definice 25. Nechť X je normovaný lineární prostor, Γ je množina a $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je kolekce prvků prostoru X. Symbol $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazveme *zobecněnou řadou*. Dále $\mathcal{F}(\Gamma)$ značí systém všech konečných podmnožin Γ. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ konverguje (též konverguje bezpodmínečně) k $x \in X$ pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \supset F\colon \left\| x - \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Existuje-li takové $x \in X$, říkáme, že je zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ (bezpodmínečně) konvergentní a x nazýváme jejím součtem. Konverguje-li zobecněná řada reálných čísel $\sum_{\gamma\in\Gamma} \|x_\gamma\|$, pak se zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ nazývá absolutně konvergentní. Pro $\Gamma = \emptyset$ klademe $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma = 0$.

Definice 26. Řekneme, že zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ v normovaném lineárním prostoru splňuje *Bolzanovu-Cauchyovu podmínku*, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \in \mathcal{F}(\Gamma) \quad \forall F' \in \mathcal{F}(\Gamma), F' \cap F = \emptyset\colon \left\| \sum_{\gamma\in F'} x_\gamma \right\| < \varepsilon.$$

Věta 27 (Nutná podmínka konvergence)**.** *Nechť* $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ *je konvergentní zobecněná řada v normovaném lineárním prostoru* X. *Pak je její součet je určen jednoznačně a* $\big(\|x_\gamma\|\big)_{\gamma\in\Gamma} \in c_0(\Gamma)$.

Věta 28. *Nechť* X *je Banachův prostor.*

(a) Zobecněná řada v X *je konvergentní právě tehdy, když splňuje Bolzanovu-Cauchyovu podmínku.*

(b) Každá absolutně konvergentní zobecněná řada v X *je konvergentní.*

(c) Je-li zobecněná řada $\sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma$ *v* X *konvergentní a* $\Lambda \subset \Gamma$, *pak je i zobecněná řada* $\sum_{\gamma\in\Lambda} x_\gamma$ *konvergentní.*

Tvrzení 29. *Nechť* $\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma$ *je zobecněná řada nezáporných čísel. Pak tato řada konverguje, právě když*

$$\sup\bigg\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\bigg\} < +\infty.$$

Potom platí

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} a_\gamma = \sup\bigg\{\sum_{\gamma\in F} a_\gamma;\ F \in \mathcal{F}(\Gamma)\bigg\}.$$

Konec 3. přednášky

Tvrzení 30. *Nechť* X *je normovaný lineární prostor a* $\{x_n\} \subset X$. *Pak zobecněná řada* $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ *je absolutně konvergentní, právě když řada* $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *je absolutně konvergentní.*

Definice 31. Nechť $\{x_n\}$ je posloupnost v normovaném lineárním prostoru X a $x \in X$. Řekneme, že $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *konverguje bezpodmínečně* (k x), pokud konverguje zobecněná řada $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (k x).

Věta 32. *Nechť* $\{x_n\}$ *je posloupnost v Banachově prostoru* X. *Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sum_{n=1}^\infty x_n$ *konverguje bezpodmínečně.*

(ii) $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ *konverguje pro každou permutaci* $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ke stejnému součtu.*

(iii) $\sum_{n=1}^\infty x_{\pi(n)}$ *konverguje pro každou permutaci* $\pi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Věta 33. *Každá absolutně konvergentní řada v Banachově prostoru je bezpodmínečně konvergentní.*
Každá řada v $\mathbb{R}$ *je absolutně konvergentní, právě když je bezpodmínečně konvergentní.*

3. Lineární operátory a funkcionály

Připomeňme si, že zobrazení $T\colon X \to Y$ mezi vektorovými prostory X, Y nad $\mathbb{K}$ se nazývá *lineární*, pokud $T(x+y) = T(x) + T(y)$ a $T(\alpha x) = \alpha T(x)$ pro všechna $x, y \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Fakt 34. *Nechť* X, Y *jsou vektorové prostory,* $T\colon X \to Y$ *je lineární zobrazení a* $M \subset X$. *Pak* $T(-M) = -T(M)$ *a* $T(\operatorname{conv} M) = \operatorname{conv} T(M)$. *Speciálně, je-li* M *symetrická, pak* $T(M)$ *je symetrická, a je-li* M *konvexní, pak* $T(M)$ *je konvexní.*

Tvrzení 35. *Nechť* X, Y *jsou normované lineární prostory a* $T\colon X \to Y$ *je lineární zobrazení. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T *je spojité.*

(ii) T *je spojité v jednom bodě.*

(iii) T *je spojité v* 0.

(iv) Existuje $C \geq 0$ *tak, že* $\|T(x)\| \leq C\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

(v) T *je lipschitzovské.*

(vi) T *je stejnoměrně spojité.*

(vii) $T(A)$ *je omezená pro každou omezenou* $A \subset X$.

(viii) $T(B_X)$ *je omezená.*

(ix) $T\big(U(0,\delta)\big)$ *je omezená pro nějaké* $\delta > 0$.

Prostor $\mathcal{L}(X,Y)$ s normou
$$\|T\| = \sup_{x \in B_X} \|T(x)\|.$$
je normovaný lineární prostor.

Lemma 36. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$.*

(a) $\|T(x)\| \leq \|T\|\|x\|$ *pro každé* $x \in X$.

(b) $\|T\| = \sup_{x \in S_X} \|T(x)\| = \sup_{x \in X\setminus\{0\}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in U_X} \|T(x)\|$.

(c) $\|T\| = \inf\{C \geq 0;\ \|T(x)\| \leq C\|x\|$ *pro každé* $x \in X\}$.

Konec 4. přednášky

Fakt 37. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $\{T_n\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ je posloupnost operátorů konvergujících k $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ v prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$. Pak $\{T_n\}$ konverguje k T bodově, tj. pro každé $x \in X$ platí $T_n(x) \to T(x)$ v prostoru Y.*

Fakt 38. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory, $S \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $T \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Pak $\|T \circ S\| \leq \|T\|\|S\|$.*

Věta 39. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je Banachův prostor. Pak $\mathcal{L}(X,Y)$ je Banachův prostor.*

Definice 40. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Prostor $\mathcal{L}(X,\mathbb{K})$ značíme X^* a nazýváme jej *duálním prostorem* k prostoru X.

Věta 41. *Je-li X normovaný lineární prostor, je prostor X^* úplný.*

Definice 42. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Říkáme, že T je

- *izomorfismus* X na Y (nebo jen izomorfismus), pokud T je bijekce X na Y a inverzní operátor T^{-1} je spojitý;
- izomorfismus X do Y (nebo jen *izomorfismus do*), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$;
- *izometrie* X na Y (nebo jen izometrie), pokud T je na a $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$;
- izometrie X do Y (nebo jen *izometrie do*), pokud $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ pro všechna $x, y \in X$.

Říkáme, že prostory X a Y jsou

- *izomorfní*, pokud existuje lineární izomorfismus X na Y;
- *izometrické*, pokud existuje lineární izometrie X na Y.

Říkáme, že prostor X je

- *izomorfně vnořen* do Y, pokud existuje lineární izomorfismus X do Y;
- *izometricky vnořen* do Y, pokud existuje lineární izometrie X do Y.

Poznámka 43. Uvědomme si, že lineární zobrazení $T\colon X \to Y$ je izometrie do, právě když $\|T(z)\| = \|z\|$ pro každé $z \in X$.

Tvrzení 44. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory.*

(a) $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do právě tehdy, když existují konstanty $C_1, C_2 > 0$ takové, že $C_1\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_2\|x\|$ pro každé $x \in X$.

(b) Je-li X izomorfní s Y a X je Banachův, je i Y Banachův.

(c) Je-li X Banachův a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je izomorfismus do, pak $\operatorname{Rng} T$ je uzavřený v Y.

Fakt 45. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$.*

(a) Jsou-li S, T izomorfismy do, pak $S \circ T$ je izomorfismus do.

(b) Jsou-li S, T izometrie do, pak $S \circ T$ je izometrie do.

Věta 46. *Nechť $X, \widehat{X}$ a Y jsou normované lineární prostory, X je hustý v $\widehat{X}$ a Y je úplný. Nechť dále $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak existuje právě jeden operátor $\widehat{T} \in \mathcal{L}(\widehat{X},Y)$ rozšiřující T, tj. $\widehat{T}\restriction_X = T$. Navíc platí $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.*

Příklad 47. Kdykoliv X je nekonečně-dimenzionální Banachův prostor (nebo obecněji normovaný lineární prostor), pak existuje lineární zobrazení $f : X \to \mathbb{K}$, které není spojité.

Konec 5. přednášky

4. Konečněrozměrné prostory

Lemma 48 (o skoro kolmici, Frigyes Riesz (1918))**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor. Je-li Y vlastní uzavřený podprostor X, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $x \in S_X$ takové, že $\operatorname{dist}(x, Y) > 1 - \varepsilon$.*

Věta 49. *Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\dim X < \infty$.

(ii) Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.

(iii) B_X je kompaktní.

(iv) Každé lineární zobrazení z X do nějakého normovaného lineárního prostoru je spojité.

(v) Každá lineární forma na X je spojitá.

(vi) Každé dvě normy na X jsou ekvivalentní.

5. Operace s normovanými lineárními prostory, projekce a doplňky

Jsou-li $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normované lineární prostory nad $\mathbb{K}$ a $1 \le p \le \infty$, pak funkce $(x, y) \mapsto \|(x, y)\|_p$, kde

$$\|(x,y)\|_p = \begin{cases} \left(\|x\|_X^p + \|y\|_Y^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pro } p < \infty, \\ \max\{\|x\|_X, \|y\|_Y\} & \text{pro } p = \infty, \end{cases} \tag{1}$$

je norma na vektorovém prostoru $X \times Y$.

Definice 50. Nechť $(X, \|\cdot\|_X)$ a $(Y, \|\cdot\|_Y)$ jsou normované lineární prostory a $1 \le p \le \infty$. Pak prostorem $X \oplus_p Y$ rozumíme normovaný lineární prostor $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$, kde norma $\|\cdot\|_p$ je daná vzorcem (1).

Konec 6. přednášky

Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a Y je jeho podprostor. Definujme relaci ekvivalence $\sim$ na X jako

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \in Y.$$

Pro $x \in X$ pak definujeme $\widehat{x}$ jako třídu ekvivalence obsahující x, tedy

$$\widehat{x} = \{y \in X;\ y \sim x\} = \{y \in X;\ y - x \in Y\} = x + Y.$$

Na množině

$$X/Y = \{\widehat{x};\ x \in X\}$$

definujeme operace $\widehat{x} + \widehat{y} = \widehat{x + y}$ a $\alpha\widehat{x} = \widehat{\alpha x}$ pro $\widehat{x}, \widehat{y} \in X/Y$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Definice 51. Nechť X je vektorový prostor a Y je jeho podprostor. Pak vektorový prostor X/Y nazýváme *faktorprostorem* prostoru X podle Y nebo též *kvocientem* X podle Y. Dále definujeme tzv. *kanonické kvocientové zobrazení* $q\colon X \to X/Y$ předpisem $q(x) = \widehat{x}$.

Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak $(X/Y, \|\cdot\|_{X/Y})$ je normovaný lineární prostor s normou

$$\begin{aligned} \|\widehat{x}\|_{X/Y} &= \inf_{y \in \widehat{x}} \|y\| = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \inf_{y \in Y} \|x - y\| = \\ &= \operatorname{dist}(x + Y, 0) = \operatorname{dist}(x, Y), \end{aligned}$$

Tato norma se nazývá *kanonická kvocientová norma*.

Tvrzení 52. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak kanonické kvocientové zobrazení $q\colon X \to X/Y$ je spojitý lineární operátor, který je na a splňuje $q(U_X) = U_{X/Y}$. Je-li Y vlastní, pak $\|q\| = 1$.*

Věta 53. *Nechť X je Banachův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Pak X/Y je též Banachův prostor.*

Definice 54. Nechť X je vektorový prostor a A, B jsou jeho podprostory. Říkáme, že X je *direktním (též algebraickým) součtem* A a B (značíme $X = A \oplus B$) pokud $A \cap B = \{0\}$ a $X = A + B = \operatorname{span}(A \cup B)$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus B = X$ se nazývá *algebraický doplněk* A v X.

Definice 55. Nechť X je vektorový prostor. Lineární zobrazení $P\colon X \to X$ se nazývá *(lineární) projekce*, pokud $P^2 = P \circ P = P$.

Fakt 56. *Nechť X je vektorový prostor.*

(a) Je-li $P\colon X \to X$ lineární projekce, pak $P\restriction_{\operatorname{Rng} P} = Id_{\operatorname{Rng} P}$.

(b) Je-li Y podprostor X a $P\colon X \to Y$ lineární zobrazení splňující $P\restriction_Y = Id_Y$, pak P je projekce X na Y.

Tvrzení 57. *Nechť X je vektorový prostor. Jsou-li P_A, P_B projekce příslušné rozkladu $X = A \oplus B$, pak $P_A + P_B = Id_X$, $\operatorname{Rng} P_A = A$, $\operatorname{Ker} P_A = B$, $\operatorname{Rng} P_B = B$ a $\operatorname{Ker} P_B = A$. Na druhou stranu, je-li P lineární projekce v X, pak $X = A \oplus B$, kde $A = \operatorname{Rng} P$, $B = \operatorname{Ker} P$ a $P = P_A$.*

Věta 58. *Nechť X je vektorový prostor a Y jeho podprostor.*

(a) Prostor Y má algebraický doplněk v X.

Konec 7. přednášky

(b) Je-li A algebraický doplněk Y v X, je A algebraicky izomorfní s X/Y; speciálně $\dim(A) = \dim(X/Y)$.

Definice 59. Je-li X vektorový prostor a Y jeho podprostor, pak *kodimenzí* Y (značíme $\operatorname{codim} Y$) rozumíme dimenzi libovolného algebraického doplňku Y (což je rovno dimenzi X/Y).

Definice 60. Je-li X normovaný lineární prostor a $X = A \oplus B$, pak říkáme, že X je *topologickým součtem* A a B, pokud jsou příslušné projekce P_A a P_B spojité. Tento fakt značíme $X = A \oplus_{\mathrm{t}} B$. Je-li A podprostor X, pak každý podprostor $B \subset X$ splňující $A \oplus_{\mathrm{t}} B = X$ se nazývá *topologický doplněk* A v X. Má-li A topologický doplněk, pak říkáme, že je *komplementovaný* (v X).

Věta 61. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y, Z jsou jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, právě když zobrazení $T\colon X \to Y \oplus_1 Z$, $T(x) = \big(P_Y(x), P_Z(x)\big)$ je izomorfismus.*

Věta 62. *Nechť X je Banachův prostor a $Y, Z \subset X$ jeho podprostory splňující $X = Y \oplus Z$. Pak $X = Y \oplus_{\mathrm{t}} Z$, právě když Y a Z jsou uzavřené.*

Věta 63. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Pak*

- *Y je isomorfní komplementovanému podprostoru X, právě když existují spojité lineární operátory $S : X \to Y$ a $T : Y \to X$ splňující $S \circ T = Id_Y$;*
- *Y je isometrické 1-komplementovanému podprostoru X, právě když existují spojité lineární operátory $S : X \to Y$ a $T : Y \to X$ splňující $S \circ T = Id_Y$ a $\max\{\|S\|, \|T\|\} \leq 1$.*

6. Hilbertovy prostory

Definice 64. *Skalárním součinem* na vektorovém prostoru X nad $\mathbb{K}$ rozumíme funkci $\langle\cdot,\cdot\rangle\colon X \times X \to \mathbb{K}$ s následujícími vlastnostmi:

(i) funkce $x \mapsto \langle x, y\rangle$ je lineární pro každé $y \in X$,

(ii) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ pro každé $x, y \in X$,

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$ pro každé $x \in X$,

(iv) $\langle x, x\rangle = 0$ právě tehdy, když $x = 0$.

Dvojici $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ nazýváme *prostor se skalárním součinem*.

Tvrzení 65 (Cauchyova-Schwarzova nerovnost)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak*

(i) $|\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}$ pro každé $x, y \in X$.

(ii) Funkce $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pro $x \in X$ je norma na X.

Fakt 66. *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Pak*

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle x, y\rangle.$$

Tvrzení 67 (rovnoběžníkové pravidlo)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big).$$

Definice 68. Nechť X je prostor se skalárním součinem. Prvky $x, y \in X$ se nazývají *ortogonální* (na sebe *kolmé*), pokud $\langle x, y \rangle = 0$. Tento fakt značíme též $x \perp y$. Prvek x je ortogonální (kolmý) k množině $A \subset X$, pokud je ortogonální ke každému jejímu prvku, což značíme $x \perp A$. Množiny $A, B \subset X$ jsou ortogonální, pokud $x \perp y$ pro každé $x \in A$, $y \in B$, což značíme $A \perp B$. Množina $A^\perp = \{x \in X;\ x \perp A\}$ se nazývá *ortogonální doplněk* A.

Fakt 69 (Pythagorova věta, asi 500 p.n.l.)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem a $x, y \in X$. Je-li $x \perp y$, pak*

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Obecněji, jsou-li $x_1, \ldots, x_n \in X$ navzájem ortogonální, pak

$$\|x_1 + \ldots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

Lemma 70. *Ortogonální doplněk množiny v prostoru se skalárním součinem je uzavřený podprostor.*

Lemma 71. *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Jsou-li $x, z \in X$ takové, že $\langle x, y \rangle = \langle z, y \rangle$ pro každé $y \in X$, pak $x = z$.*

Definice 72. Prostor se skalárním součinem $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ se nazývá *Hilbertův prostor*, pokud je úplný v metrice indukované skalárním součinem, tj. pokud $(X, \|\cdot\|)$ je Banachův prostor, kde $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$.

Tvrzení 73. *Nechť $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ je prostor se skalárním součinem nad $\mathbb{K}$. Pak funkce $\langle \cdot, \cdot \rangle \colon X \times X \to \mathbb{K}$ je lipschitzovská na omezených množinách (a tedy spojitá).*

Tvrzení 74 (polarizační vzorec)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem. Pak pro všechna $x, y \in X$ platí*

$$\langle x, y \rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\big)$$

v reálném případě, resp.

$$\langle x, y \rangle = \tfrac{1}{4}\big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\big)$$

v komplexním případě.

Důsledek 75. *Nechť X, Y jsou prostory se skalárním součinem a $T \colon X \to Y$ je lineární izometrie do. Pak T zachovává skalární součin, tj. $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ pro každé $x, y \in X$.*

Konec 8. přednášky

Věta 76 (Jordan - von Neumann)**.** *Nechť $(X, \|\cdot\|)$ je normovaný lineární prostor. Pak $\|\cdot\|$ je generovaná nějakým skalárním součinem, právě když $\|\cdot\|$ splňuje rovnoběžníkové pravidlo (tj. rovnost z Tvrzení 67).*

Poznámka: důkaz Věty 76 předveden pouze pro reálný případ

Věta 77 (Frigyes Riesz, 1934)**.** *Nechť C je uzavřená neprázdná konvexní množina v Hilbertově prostoru H. Pak pro každé $x \in H$ existuje právě jedno $y \in C$ tak, že $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

Lemma 78 (F. Riesz, 1934)**.** *Nechť X je prostor se skalárním součinem, Y je jeho podprostor a $x \in X$. Pak $y \in Y$ splňuje $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, Y)$ právě tehdy, když $x - y \in Y^\perp$.*

Věta 79 (F. Riesz, 1934)**.** *Nechť Y je uzavřený podprostor Hilbertova prostoru H. Pak $H = Y \oplus_{\mathrm{t}} Y^\perp$ a projekce $P_Y \colon H \to Y$ příslušná rozkladu $H = Y \oplus Y^\perp$ má následující vlastnosti:*

(i) $\|P_Y(x) - x\| = \operatorname{dist}(x, Y) \leq \|x\|$ *pro každé $x \in H$,*

(ii) $\|P_Y\| \leq 1$.

Věta 80. *Nechť H je Hilbertův prostor a $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset H$ je posloupnost navzájem ortogonálních prvků. Pak řada $\sum_{n=1}^\infty x_n$ konverguje bezpodmínečně, právě když konverguje.*

Konec 9. přednášky

Definice 81. Je-li X prostor se skalárním součinem a $A \subset X$, řekneme, že množina A je

- *ortogonální*, pokud $x \perp y$ pro všechna $x, y \in A$, $x \neq y$;
- *ortonormální*, pokud A je ortogonální a $A \subset S_X$;
- *maximální ortonormální*, pokud A je ortonormální a neexistuje ortonormální množina obsahující A různá od A;
- *úplný ortonormální*, pokud A je ortonormální a $\overline{\operatorname{span}}\, A = X$;

- *ortonormální báze*, pokud $A = \{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$ je ortonormální množina a každé $x \in X$ lze vyjádřit jako $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} x_\gamma e_\gamma$ pro nějaké skaláry x_γ.

Fakt 82. *Je-li A ortonormální množina v prostoru se skalárním součinem, pak $\|x - y\| = \sqrt{2}$ pro každé dva prvky $x, y \in A$, $x \neq y$.*

Věta 83. *Každý prostor se skalárním součinem obsahuje maximální ortonormální systém.*

Věta 84 (Besselova nerovnost)**.** *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální soustava v prostoru X se skalárním součinem, platí $\sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ pro každé $x \in X$.*

Věta 85. *Nechť H je Hilbertův prostor a $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ je ortonormální systém v H. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.*

(i) $\|x\|^2 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |\langle x, e_\gamma\rangle|^2$ *pro každé $x \in X$ (tzv. Parsevalova rovnost).*

(ii) $x = \sum_{\gamma\in\Gamma} \langle x, e_\gamma\rangle e_\gamma$ *pro každé $x \in X$.*

(iii) $\{e_\gamma\}$ *je ortonormální báze.*

(iv) $X = \overline{\operatorname{span}}\{e_\gamma;\ \gamma \in \Gamma\}$.

(v) $\{e_\gamma\}$ *je maximální ortonormální systém.*

Důsledek 86. *Každý Hilbertův prostor má ortonormální bázi.*

Konec 10. přednášky

Věta 87 (Ernst Sigismund Fischer (1907), Frigyes Riesz (1907))**.** *Je-li $\{e_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ ortonormální báze Hilbertova prostoru H, je zobrazení $T\colon H \to \ell_2(\Gamma)$, $T(x) = \{\langle x, e_\gamma\rangle\}_{\gamma\in\Gamma}$ izometrie H a $\ell_2(\Gamma)$. Tedy každý Hilbertův prostor je izometrický prostoru $\ell_2(\Gamma)$ pro vhodnou množinu Γ.*

Věta 88 (vyjádření ortogonální projekce)**.** *Nechť H je Hilbertův prostor a Y jeho uzavřený podprostor. Nechť $(e_j)_{j\in J}$ je nějaká ortonormální báze prostoru Y. Pak projekci na Y podél $Y^\perp$ (tzv. ortogonální projekci) lze vyjádřit vzorcem*

$$Px = \sum_{j\in J} \langle x, e_j\rangle e_j, \quad x \in H.$$

Věta 89 (Heinrich Löwig (1934), F. Riesz (1934))**.** *Nechť H je Hilbertův prostor. Pro každé $y \in H$ označme $f_y \in H^*$ funkcionál definovaný jako $f_y(x) = \langle x, y\rangle$ pro $x \in H$. Pak zobrazení $I\colon H \to H^*$, $I(y) = f_y$ je sdruženě lineární izometrie H na H^*.*

Lemma 90. *Nechť X je vektorový prostor, f je lineární forma na X a $x \in X \setminus \operatorname{Ker} f$. Pak $X = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{span}\{x\}$. Tedy* $\operatorname{codim} \operatorname{Ker} f = 1$.

7. Reálné a komplexní normované lineární prostory

Definice 91. Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor. Symbolem X_R označme prostor X uvažovaný jako reálný. Tj. X_R je tatáž množina jako X uvažovaná s operací sčítání jako v X, s násobením reálným číslem jako v X a se stejně definovanou normou.

Věta 92 (reálná verze komplexního normovaného lineárního prostoru)**.** *Nechť X je komplexní normovaný lineární prostor. Pak platí:*

(i) X_R *je reálný normovaný lineární prostor.*

(ii) X_R *je úplný, právě když X je úplný.*

(iii) $\varphi : X \to \mathbb{C}$ *je lineární, právě když* $\operatorname{Re}\varphi : X_R \to \mathbb{R}$ *je lineární a* $\operatorname{Im}\varphi(x) = -\operatorname{Re}\varphi(ix)$ *pro každé $x \in X$.*

(iv) Je-li $\varphi \in X^*$, pak funkcionál $\psi(x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$, $x \in X_R$, patří do $(X_R)^*$ a platí $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

(v) Je-li $\psi \in (X_R)^*$, pak existuje právě jeden funkcionál $\varphi \in X^*$ takový, že $\psi(x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$ pro $x \in X_R$. Je dán vzorcem $\varphi(x) = \psi(x) - i\psi(ix)$ a splňuje $\|\psi\| = \|\varphi\|$.

(vi) Prostory $(X_R)^*$ a $(X^*)_R$ jsou izometrické.

Definice 93. Nechť X je reálný normovaný lineární prostor. Na $X \times X$ definujeme:

- $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, $x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$,
- $(\alpha_1 + i\alpha_2) \cdot (x_1, x_2) = (\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ a $x_1, x_2 \in X$.

- $\|(x_1,x_2)\|_{X_\mathbb{C}} = \sup\bigl\{\|(\cos\alpha)x_1 + (\sin\alpha)x_2\|_X;\ \alpha \in [0,2\pi)\bigr\}$, $x_1, x_2 \in X$.

Symbolem $(X_\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ značíme komplexní normovaný lineární prostor $(X \times X, +, \cdot, \|\cdot\|_{X_\mathbb{C}})$.

Věta 94 (komplexifikace)**.** *Je-li X reálný normovaný lineární prostor, pak je $(X_\mathbb{C}, \|\cdot\|)$ komplexní normovaný lineární prostor. Je-li navíc X Banachův, pak je $X_\mathbb{C}$ Banachův.*

Poznámka: důkaz Věty 94 pouze naznačen.
Konec 11. přednášky

II. Hahnova-Banachova věta a dualita

1. Hahnova-Banachova věta

Definice 95. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$. Funkce $p\colon X \to \mathbb{R}$ se nazývá *sublineární funkcionál*, pokud platí

- $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(tx) = tp(x)$ pro každé $x \in X$ a $t \in [0,+\infty)$.

Funkce $p\colon X \to [0,+\infty)$ se nazývá *pseudonorma*, pokud platí

- $p(x+y) \le p(x) + p(y)$ pro každé $x, y \in X$,
- $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ pro každé $x \in X$ a $\alpha \in \mathbb{K}$.

Věta 96 (Hans Hahn (1927), Stefan Banach (1929))**.** *Nechť X je vektorový prostor a Y je podprostor X.*

(a) Je-li X reálný, p je sublineární funkcionál na X a f je lineární forma na Y splňující $f(x) \le p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $F(x) \le p(x)$ pro každé $x \in X$.

(b) Je-li p pseudonorma na X a f je lineární forma na Y splňující $|f(x)| \le p(x)$ pro každé $x \in Y$, pak existuje lineární forma F na X taková, že $F\restriction_Y = f$ a $|F(x)| \le p(x)$ pro každé $x \in X$.

Věta 97 (Hahnova-Banachova)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je podprostor X a $f \in Y^*$. Pak existuje $F \in X^*$ takové, že $F\restriction_Y = f$ a $\|F\| = \|f\|$.*

Důsledek 98. *Nechť X je netriviální normovaný lineární prostor. Pro každé $x \in X$ existuje $f \in S_{X^*}$ takové, že $f(x) = \|x\|$. Odtud plyne, že jsou-li $x, y \in X$ různé body, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f(x) \ne f(y)$ (říkáme, že X^* odděluje body X).*

Důsledek 99 (Duální vyjádření normy)**.** *Je-li X normovaný lineární prostor a $x \in X$, pak $\|x\| = \max_{f \in B_{X^*}} |f(x)|$.*

Věta 100 (Oddělování bodu a podprostoru)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je uzavřený podprostor X a $x \notin Y$. Pak existuje $f \in S_{X^*}$ tak, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = \operatorname{dist}(x, Y) > 0$.*

Věta 101 (Oddělování konvexních množin)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:*

(a) Je-li A otevřená, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\operatorname{Re} f(x) < \inf_B \operatorname{Re} f$ pro každé $x \in A$.

(b) Je-li A uzavřená a B kompaktní, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_A \operatorname{Re} f < \inf_B \operatorname{Re} f$.

Konec 12. přednášky

Věta 102. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Každý konečněrozměrný podprostor X je komplementovaný.

(b) Každý uzavřený podprostor X konečné kodimenze je komplementovaný.

2. Duální a adjungované operátory - základy

Definice 103. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Operátor $T^*\colon Y^* \to X^*$ definovaný předpisem

$$T^* f(x) = f(Tx)$$

pro $f \in Y^*$ a $x \in X$ se nazývá *duální* (nebo též *adjungovaný*) operátor k T. (Ve Větě 104 dokážeme, že T^* je dobře definovaný.) Operátor $(T^*)^*$ (tj. operátor duální k T^*) značíme T^{**}.

Věta 104. *Nechť X, Y, Z jsou normované lineární prostory.*

(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, je $T^* f \in X^*$ pro každé $f \in Y^*$. Dále $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ a $\|T^*\| = \|T\|$.

(b) Zobrazení $T \mapsto T^*$ je lineární izometrie z $\mathcal{L}(X,Y)$ do $\mathcal{L}(Y^*, X^*)$.

(c) Nechť $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Pak $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$. Dále $Id_X^* = Id_{X^*}$.

Věta 105. *Nechť H_1, H_2 jsou Hilbertovy prostory a $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Pak existuje jednoznačně určený operátor $T^\star \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ takový, že pro každé $y \in H_2$ a $x \in H_1$ platí*

$$\langle Tx, y\rangle_{H_2} = \langle x, T^\star y\rangle_{H_1}.$$

Dále platí, že $T^\star = I_1^{-1} \circ T^* \circ I_2$, kde $I_j\colon H_j \to H_j^*$, $j = 1, 2$ jsou příslušné sdruženě lineární izometrie z Věty 89.

Definice 106. Operátor $T^\star$ z předcházející věty nazýváme hilbertovsky adjungovaným operátorem k T.

Věta 107. *Nechť H_1, H_2, H_3 jsou Hilbertovy prostory.*

(a) Je-li $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$, je $T^{\star\star} = (T^\star)^\star = T$.

Konec 13. přednášky

(b) Zobrazení $T \mapsto T^\star$ je sdruženě lineární izometrie $\mathcal{L}(H_1, H_2)$ na $\mathcal{L}(H_2, H_1)$.

(c) Nechť $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ a $S \in \mathcal{L}(H_2, H_3)$. Pak $(S \circ T)^\star = T^\star \circ S^\star$. Dále $(Id_{H_1})^\star = Id_{H_1}$.

3. Reprezentace duálů

Definice 108. Nechť $p \in \mathbb{R}$, $p \geq 1$, nebo $p = \infty$. Číslo $q \in \mathbb{R}$, $q \geq 1$, nebo $q = \infty$ nazýváme *sdruženým exponentem* k p, pokud platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, přičemž používáme konvenci, že $\frac{1}{\infty} = 0$.

Věta 109 (Reprezentace duálů ke klasickým prostorům)**.** *Nechť $I \neq \emptyset$.*

(a) Prostor $c_0(I)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $\ell_1(I)$ pomocí zobrazení $I\colon \ell_1(I) \to c_0(I)^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i \in I} x_i y_i.$$

(b) Je-li $1 \leq p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $\ell_p(I)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $\ell_q(I)$ pomocí zobrazení $I\colon \ell_q(I) \to \ell_p(I)^*$, $I(y) = f_y$, kde

$$f_y(x) = \sum_{i \in I} x_i y_i.$$

Konec 14. přednášky

(c) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ libovolný prostor s mírou, $1 < p < \infty$ a q je sdružený exponent k p, pak prostor $L_p(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_q(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_q(\mu) \to L_p(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu.$$

(d) Je-li $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ prostor se σ-konečnou mírou, pak prostor $L_1(\mu)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $L_\infty(\mu)$ pomocí zobrazení $I\colon L_\infty(\mu) \to L_1(\mu)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega fg \,\mathrm{d}\mu.$$

Poznámka: důkaz případů (c) a (d) byl na přenášce proveden pouze pro případ konecné míry μ a pro $p = 1$, pro případ konečné míry μ a $p > 1$ bylo ukázáno že se jedná o izometrii (že je v tomto případě I na bylo pouze naznačeno).

Věta 110. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $1 \leq p \leq \infty$. Nechť q je sdružený exponent k p. Pak zobrazení $I\colon X^* \oplus_q Y^* \to (X \oplus_p Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f,g)(x,y) = f(x) + g(y)$$

je lineární izometrie $X^* \oplus_q Y^*$ na $(X \oplus_p Y)^*$.

Konec 15. přednášky

Definice 111. Nechť K je kompaktní prostor. Řekneme, že lineární funkcionál Λ na $C(K)$ je *nezáporný*, jestliže $\Lambda(f) \geq 0$ pro každou nezápornou funkci $f \in C(K)$.

Věta 112 (O reprezentaci nezáporných lineárních funkcionálů na $C(K)$)**.** *Nechť K je kompaktní prostor a Λ je nezáporný lineární funkcionál na $C(K)$. Pak existuje jednoznačně určená regulární borelovská nezáporná míra μ na K splňující $\Lambda(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu$ pro každé $f \in C(K)$.*

Věta 113 (Rieszova věta o reprezentaci $C(K)^*$)**.** *Je-li K kompaktní prostor, pak prostor $C(K)^*$ je lineárně izometrický s prostorem $M(K)$ všech regulárních borelovských komplexních (resp. znaménkových) měr na K pomocí zobrazení $I\colon M(K) \to C(K)^*$, $I(\mu) = \varphi_\mu$, kde*

$$\varphi_\mu(f) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu.$$

Poznámka: důkazy Vět 112 a 113 na přednášce nebyly.

4. Anihilátory, dualita kvocientů a podprostorů

Definice 114. Je-li X normovaný lineární prostor a $A \subset X$, pak definujeme tzv. *anihilátor* množiny A jako

$$A^\perp = \{f \in X^*;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme tzv. *zpětný anihilátor* jako

$$B_\perp = \{x \in X;\ f(x) = 0 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Lemma 115. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $A \subset X$, $B \subset X^*$. Pak*

(a) *$A^\perp$ je uzavřený podprostor X^*,*

(b) *$B_\perp$ je uzavřený podprostor X,*

(c) $(A^\perp)_\perp = \overline{\operatorname{span}}\, A$,

(d) $(B_\perp)^\perp \supset \overline{\operatorname{span}}\, B$.

Věta 116. *Nechť X je normovaný lineární prostor a Y je jeho podprostor.*

(a) *Nechť Y je uzavřený. Zobrazení $I\colon Y^\perp \to (X/Y)^*$ dané předpisem*

$$I(f)(\widehat{x}) = f(x)$$

je lineární izometrie $Y^\perp$ na $(X/Y)^*$.

(b) *Zobrazení $I\colon X^*/Y^\perp \to Y^*$ dané předpisem*

$$I(\widehat{f}) = f\restriction_Y$$

je lineární izometrie $X^*/Y^\perp$ na Y^*.

Tedy $(X/Y)^*$ lze identifikovat s $Y^\perp$ a Y^* lze identifikovat s $X^*/Y^\perp$.

Věta 117. *Jsou-li X, Y normované lineární prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, pak platí*

(a) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Rng} T)^\perp$,

(b) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Rng} T^*)_\perp$,

(c) $\overline{\operatorname{Rng} T} = (\operatorname{Ker} T^*)_\perp$,

(d) *T^* je prostý, právě když $\operatorname{Rng} T$ je hustý.*

5. Druhý duál a reflexivita

Definice 118. Nechť X je normovaný lineární prostor. Symbolem X^{**} značíme $(X^*)^*$, tj. duál k prostoru X^*. Tento prostor nazýváme *druhým duálem*.

Je-li $x \in X$, pak definujeme tzv. *evaluační funkcionál* $\varepsilon_x \in X^{**}$ předpisem $\varepsilon_x(f) = f(x)$ pro každé $f \in X^*$.

Definice 119. Nechť X je normovaný lineární prostor. Zobrazení $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ dané předpisem $\varepsilon(x) = \varepsilon_x$ se nazývá *kanonické vnoření X do X^{**}*.

Tvrzení 120. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak kanonické vnoření $\varepsilon\colon X \to X^{**}$ je lineární izometrie do. Je-li tedy X navíc Banachův, pak $\varepsilon(X)$ je uzavřený podprostor X^{**}*

Konec 16. přednášky

Tvrzení 121 (J. P. Schauder, 1930)**.** *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory, $\varepsilon_X : X \to X^{**}$ a $\varepsilon_Y : Y \to Y^{**}$ jsou kanonická vnoření do druhých duálů a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak*

$$T^{**} \circ \varepsilon_X = \varepsilon_Y \circ T.$$

Věta 122. *Pro každý normovaný lineární prostor X existuje jeho zúplnění, tj. Banachův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Pro každý prostor se skalárním součinem X existuje jeho zúplnění, tj. Hilbertův prostor takový, že X je jeho hustý podprostor. Tato rozšíření jsou určena jednoznačně až na izometrii, tj. jsou-li X_1, X_2 dvě zúplnění X, pak existuje lineární izometrie X_1 na X_2, která je na X identitou.*

Věta 123. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.*

(a) T je izomorfismus na, právě když T^* je izomorfismus na. V tomto případě navíc platí $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(b) T je izometrie na, právě když T^* je izometrie na.

Speciálně, jsou-li X a Y “lineárně izometrické” pak jsou také X^* a Y^* “lineárně izometrické”.

Definice 124. Banachův prostor X se nazývá *reflexivní*, pokud $X^{**} = \varepsilon(X)$.

Věta 125. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.*

(a) Je-li X izomorfní s reflexivním prostorem, pak je i X reflexivní.

(b) Uzavřený podprostor reflexivního prostoru je reflexivní.

(c) Prostor X je reflexivní právě tehdy, když jeho duál X^* je reflexivní.

(d) Je-li X reflexivní a Y jeho uzavřený podprostor, pak je X/Y reflexivní.

Příklady 126.

(a) Prostor $L_p(\mu)$ je reflexivní pro libovolnou míru μ a $1 < p < \infty$.

(b) Každý Hilbertův prostor je relexivní.

(c) Každý konečněrozměrný prostor je reflexivní.

(d) Prostory c_0, ℓ_1, ℓ_∞, $L_1([0,1])$, $L_\infty([0,1])$ a $C([0,1])$ nejsou reflexivní.

(e) Existuje Banachův prostor J (tzv. Jamesův prostor), který není reflexivní, i když je izometrický s J^{**}.

Věta 127 (James)**.** *Banachův prostor X je reflexivní, právě když pro každé $x^* \in X^*$ existuje $x \in B_X$ splňující $\|x^*\| = x^*(x)$.*

Poznámka: na přednášce byla vynechán důkaz složitejší implikace ve Větě 127.
Konec 17. přednášky

6. Slabé konvergence posloupností

Definice 128. Nechť X je normovaný lineární prostor.

(a) Řekneme, že posloupnost $\{x_n\}$ v prostoru X *slabě konverguje* k $x \in X$ (značíme $x_n \xrightarrow{w} x$), pokud pro každé $x^* \in X^*$ platí $x^*(x_n) \to x^*(x)$.

(b) Řekneme, že posloupnost $\{x_n^*\}$ v prostoru X^* *slabě s hvězdičkou konverguje* k $x^* \in X^*$ (značíme $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$), pokud pro každé $x \in X$ platí $x_n^*(x) \to x^*(x)$.

Lemma 129. *Nechť X je normovaný lineární prostor, $\{x_n\}$ posloupnost v X a $\{x_n^*\}$ posloupnost v X^*.*

(a) Existuje nejvýše jedno $x \in X$ splňující $x_n \xrightarrow{w} x$.

(b) Existuje nejvýše jedno $x^* \in X^*$ splňující $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.

(c) Pokud $x \in X$ a $x_n \to x$, pak $x_n \xrightarrow{w} x$.

(d) Pokud $x^* \in X^*$ a $x_n^* \xrightarrow{w} x^*$, pak $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$.

Věta 130. *Nechť X je separabilní normovaný lineární prostor a $\{x_n^*\}$ omezená posloupnost v X^*. Pak $\{x_n^*\}$ má w^*-konvergentní podposloupnost.*

Věta 131. *Banachův prostor X je reflexivní, právě když každá omezená poslopnost $\{x_n\}$ v X má slabě konvergentní podposloupnost.*

Poznámka: na přednášce byl vynechán důkaz složitejší implikace ve Větě 131.

Věta 132. *Nechť X je normovaný lineární prostor a X^* je separabilní. Pak X je separabilní.*

III. Omezené operátory v Banachových prostorech

1. Kompaktní operátory

Definice 133. Nechť X, Y jsou normované lineární prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T se nazývá *kompaktní operátor*, pokud pro každou omezenou $A \subset X$ je množina $T(A)$ relativně kompaktní v Y. Množinu všech kompaktních lineárních operátorů z X do Y značíme $\mathcal{K}(X, Y)$.

Lineární operátor T se nazývá *konečněrozměrný*, pokud $\operatorname{Rng} T$ má konečnou dimenzi. V dalším budeme pracovat takřka výhradně se spojitými konečněrozměrnými operátory, označíme proto množinu všech konečněrozměrných spojitých lineárních operátorů z X do Y jako $\mathcal{F}(X, Y)$.

Tvrzení 134. *Nechť X, Y jsou normované lineární prostory. Každý kompaktní lineární operátor z X do Y je automaticky spojitý. Dále, je-li $T\colon X \to Y$ lineární, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) T je kompaktní.

(ii) $T(B_X)$ je relativně kompaktní.

(iii) Je-li $\{x_n\}$ omezená posloupnost v X, pak posloupnost $\{T(x_n)\}$ má konvergentní podposloupnost.

Věta 135. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory.*

(a) Operátor $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ je konečněrozměrný právě tehdy, když existují $f_1, \dots, f_n \in X^*$ a $y_1, \dots, y_n \in Y$ takové, že $T(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x) y_i$ pro každé $x \in X$.

(b) $\mathcal{K}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$ a $\mathcal{F}(X, Y)$ je podprostor $\mathcal{K}(X, Y)$.

(c) $\mathcal{K}(X, Y)$ je uzavřený podprostor $\mathcal{L}(X, Y)$.

(d) Složíme-li kompaktní lineární operátor se spojitým lineárním operátorem zleva či zprava, dostaneme opět kompaktní operátor.

Konec 18. přednášky

Věta 136 (J. P. Schauder, 1930)**.** *Nechť X je normovaný lineární prostor, Y je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak T^* je kompaktní, právě když T je kompaktní.*

2. Úplnost v Banachových prostorech

Věta 137 (Princip stejnoměrné omezenosti)**.** *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X,Y)$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\sup\{\|T\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

(ii) Pro každé $x \in X$ je $\sup\{\|T(x)\|;\ T \in \mathcal{A}\} < +\infty$.

Důsledek 138. *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $\{T_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{L}(X,Y)$ taková, že pro každé $x \in X$ existuje $T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x)$. Pak $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $\|T\| \leq \liminf \|T_n\| \in \mathbb{R}$.*

Tvrzení 139. *Nechť X je Banachův prostor, $\{x_n^*\}$ je posloupnost v X^*, $x^* \in X^*$ a $D \subset X$ splňuje $\overline{\operatorname{span}}\, D = X$. Pak $x_n^* \stackrel{w^*}{\to} x^*$, právě když $\{x_n^*\}$ je omezená a $x_n^*(d) \to x^*(d)$ pro každé $d \in D$.*

Tvrzení 140. *Nechť X je Banachův prostor, $\{x_n\}$ je posloupnost v X, $x \in X$ a $D \subset X^*$ splňuje $\overline{\operatorname{span}}\, D = X^*$. Pak $x_n \stackrel{w}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $d(x_n) \to d(x)$ pro každé $d \in D$.*

Příklady 141. Pro následující Banachovz prostory X, posloupnost $\{x_n\}$ v X a $x \in X$ platí:

(a) Pokud $X = c_0$ nebo $X = \ell_p$ pro $p \in (1,\infty)$, pak $x_n \stackrel{w}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(i) \to x(i)$, $i \in \mathbb{N}$;

(b) Pokud $X = \ell_p$ pro $p \in [1,\infty]$, pak $x_n \stackrel{w^*}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(i) \to x(i)$, $i \in \mathbb{N}$;

(c) Pokud $X = C(K)$, pak $x_n \stackrel{w}{\to} x$, právě když $\{x_n\}$ je omezená a $x_n(k) \to x(k)$, $k \in K$;

(d) Pokud $X = \ell_1$, pak $x_n \stackrel{w}{\to} x$, právě když $x_n \stackrel{\|\cdot\|}{\to} x$ (bez důkazu);

Definice 142. Zobrazení $f\colon X \to Y$ mezi metrickými prostory X, Y se nazývá *otevřené*, pokud $f(G)$ je otevřená množina v Y pro každou otevřenou množinu $G \subset X$.

Věta 143 (O otevřeném zobrazení, Juliusz Paweł Schauder, 1930)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak T je otevřené zobrazení.*

Lemma 144 (J. P. Schauder, 1930)**.** *Nechť X je Banachův prostor, Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Jestliže $r, s > 0$ jsou taková, že $U(0,s) \subset \overline{T(U(0,r))}$, pak dokonce $U(0,s) \subset T(U(0,r))$.*

Konec 19. přednášky

Důsledek 145 (S. Banach, 1929)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Pak T je izomorfismus X na Y, právě když T je prostý a na.*

Důsledek 146. *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ je na. Pak platí:*

(a) Existuje $c > 0$ takové, že pro každé $y \in Y$ existuje $x \in T^{-1}(y)$ splňující $\|x\| \leq c\|y\|$.

(b) Zobrazení $\widehat{T}\colon X/\operatorname{Ker} T \to Y$ dané předpisem $\widehat{T}(\widehat{x}) = T(x)$ je lineární izomorfismus na. Tedy prostor Y je izomorfní s $X/\operatorname{Ker} T$.

Definice 147. Je-li $f\colon X \to Y$ zobrazení množiny X do množiny Y, pak množinu

$$\operatorname{graf} f = \{(x,y) \in X \times Y;\ y = f(x)\}$$

nazýváme *grafem zobrazení f*. Říkáme, že zobrazení $f\colon X \to Y$, kde X, Y jsou metrické prostory, *má uzavřený graf*, pokud množina $\operatorname{graf} f$ je uzavřená v $X \times Y$.

Věta 148 (O uzavřeném grafu, S. Banach, 1932)**.** *Nechť X, Y jsou Banachovy prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojité, právě když má uzavřený graf.*

3. Spektrální teorie (zejména) kompaktních operátorů

Tvrzení 149. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak T je invertibilní, právě když T je bijekce.*

Tvrzení 150. *Nechť X je Banachův prostor.*

(a) Pokud $T \in \mathcal{L}(X)$ a $\|T\| < 1$, pak $Id_X - T$ je inveribilní a platí $(Id_X - T)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$.

(b) Pokud je T invertovatelný a $\|S - T\| < \frac{1}{\|T\|^{-1}}$, pak S je invertovatelný a $S^{-1} = T^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}(I - ST^{-1})^n$. Speciálně, množina všech invertibilních operátorů v $\mathcal{L}(X)$ je otevřená.

Definice 151. Nechť X je normovaný lineární prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Číslo $\lambda \in \mathbb{K}$ nazýváme *vlastním číslem* operátoru T, pokud $\operatorname{Ker}(\lambda I - T) \neq \{0\}$, tj. pokud $T(x) = \lambda x$ pro nějaké $x \in X$, $x \neq 0$. Prostor $\operatorname{Ker}(\lambda I - T)$ pak nazýváme *vlastním prostorem* příslušným číslu λ. Nenulové prvky vlastního prostoru příslušného číslu λ se nazývají *vlastní vektory* příslušné číslu λ. Množina všech vlastních čísel operátoru T se nazývá *bodové spektrum* operátoru T a značí se $\sigma_{\mathrm{p}}(T)$.

Spektrum operátoru T je množina všech čísel $\lambda \in \mathbb{K}$, pro která operátor $\lambda I - T$ není invertibilní. Spektrum operátoru T značíme $\sigma(T)$.

Konec 20. přednášky

Rezolventní množina operátoru T je $\rho(T) := \mathbb{K} \setminus \sigma(T)$. *Rezolventní funkce* je definována jako $\rho(T) \ni \lambda \mapsto (\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$

Věta 152. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T)$ je kompaktní podmnožina $\mathbb{K}$ splňující $\sigma(T) \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$. Je-li X komplexní, pak $\sigma(T)$ je neprázdné.*

Poznámka: důkaz neprázdnosti spektra na přednášce nebyl.

Věta 153. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Pak $\sigma(T^*) = \sigma(T)$. Navíc, pokud je X Hilbertův, pak $\sigma(T^\star) = \overline{\sigma(T)}$*

Věta 154. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$.*

(a) Jestliže $\operatorname{Rng}(T)$ je uzavřený, pak $\dim \operatorname{Rng}(T) < \infty$.

(b) Jestliže $\dim X = \infty$, pak $0 \in \sigma(T)$.

(c) Jestliže $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, pak $\dim \operatorname{Ker}(\lambda I - T) < \infty$ a $\operatorname{Rng}(\lambda I - T)$ je uzavřený.

Věta 155 (Fredholmova alternativa)**.** *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak operátor $\lambda I - T$ je na, právě když je prostý.*

Důsledek 156. *Nechť X je Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak $\sigma(T) \subset \{0\} \cup \sigma_{\mathrm{p}}(T)$.*

Lemma 157. *Nechť X je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X)$. Jsou-li $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ různá vlastní čísla operátoru T a $x_1, \dots, x_n \in X$ vlastní vektory příslušné číslům $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

Věta 158. *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$ a $T \in \mathcal{K}(X)$. Pak pro každé $r > 0$ je množina $\sigma(T) \cap \{\lambda \in \mathbb{K};\ |\lambda| > r\}$ konečná.*

Důsledek 159. *Nechť X je nekonečněrozměrný Banachův prostor a $T \in \mathcal{K}(X)$. Potom $\sigma(T) = \{0\} \cup \{\lambda_n\}$, kde $\{\lambda_n\}$ je posloupnost, která je buď konečná, nebo nekonečná a konvergující k 0, a je tvořena nenulovými vlastními čísly operátoru T, přičemž každé z nich má konečněrozměrný vlastní podprostor.*

Konec 21. přednášky

Věta 160 (Druhá Fredholmova věta)**.** *Nechť X je Banachův prostor nad $\mathbb{K}$, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*)\big)_\perp,$$
$$\operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \big(\operatorname{Ker}(\lambda I_X - T)\big)^\perp.$$

Věta 161 (Třetí Fredholmova věta)**.** *Nechť X je Banachův prostor, $T \in \mathcal{K}(X)$ a $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Pak*

$$\dim \operatorname{Ker}(\lambda I_X - T) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_X - T) = \dim \operatorname{Ker}(\lambda I_{X^*} - T^*) = \operatorname{codim} \operatorname{Rng}(\lambda I_{X^*} - T^*) < \infty.$$

Poznámka: Věty 160 a 161 na přednášce dokázány nebyly.

4. Samoadjungované kompaktní operátory na Hilbertově prostoru

Definice 162. Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Množina $N_T = \{\langle Tx, x\rangle;\ x \in S_H\}$ se nazývá *numerický range* operátoru T.

Tvrzení 163. *Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$.*

(a) $N_{\alpha I + \beta T} = \alpha + \beta N_T$ pro libovolná $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(b) $\sigma_{\mathrm{p}}(T) \subset N_T \subset B_{\mathbb{K}}(0, \|T\|)$.

(c) $\sigma(T) \subset \overline{N_T}$.

Definice 164. Nechť H je Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Řekneme, že T je *samoadjungovaný* pokud $T = T^\star$.

Věta 165. *Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{L}(H)$. Pak T je samoadjungovaný, právě když $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ pro každé $x, y \in H$. Pro T samoadjungovaný platí následující tvrzení:*

(a) $\langle Tx, x\rangle \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in H$.

(b) $N_T \subset \mathbb{R}$ a označíme-li $m_T = \inf N_T$, $M_T = \sup N_T$, pak $\|T\| = \max\{|m_T|, |M_T|\}$ a $\{m_T, M_T\} \subset \sigma(T) \subset [m_T, M_T]$, a tedy číslo $\|T\|$ nebo $-\|T\|$ leží v $\sigma(T)$.

Definice 166. Nechť A je množina a $f\colon A \to A$ je zobrazení. Množina $B \subset A$ se nazývá invariantní vůči f, pokud $f(B) \subset B$, tj. $f\restriction_B\colon B \to B$.

Lemma 167. *Nechť H je Hilbertův prostor a označme $SA(H) = \{T \in \mathcal{L}(H);\ T = T^\star\}$. Pak pro $T \in SA(H)$ platí následující tvrzení:*

(a) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(T)$ právě tehdy, když $\overline{\lambda} \in \sigma_{\mathrm{p}}(T^\star)$. Vlastní prostor T příslušný vlastnímu číslu λ je shodný s vlastním prostorem $T^\star$ příslušným vlastnímu číslu $\overline{\lambda}$.

(b) Pokud λ_1, λ_2 jsou různá vlastní čísla T, pak $\operatorname{Ker}(\lambda_1 I - T) \perp \operatorname{Ker}(\lambda_2 I - T)$.

(c) Pokud $\sigma(T) = \{0\}$, pak $T = 0$.

(d) Nechť $Y \subset H$ je uzavřený podprostor invariantní vůči T i $T^\star$. Pak $T\restriction_Y \in SA(Y)$.

Věta 168 (spektrální rozklad samoadjungovaného kompaktního operátoru; D. Hilbert (1904), Erhard Schmidt (1907))**.** *Nechť H je netriviální Hilbertův prostor a $T \in \mathcal{K}(H)$ je samoadjungovaný. Pak existuje ortonormální báze B prostoru H tvořená vlastními vektory T. Vektorů z B příslušných nenulovým vlastním číslům T je spočetně mnoho, a seřadíme-li je libovolně do prosté posloupnosti $\{e_n\}_{n=1}^N$, $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, pak $\{e_n\}$ je ortonormální báze $\overline{\operatorname{Rng} T}$ a pro každé $x \in H$ je*

$$Tx = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \langle x, e_n\rangle e_n,$$

kde λ_n je vlastní číslo příslušné vlastnímu vektoru e_n.

Konec 22. přednášky

V. Konvoluce funkcí a Fourierova transformace

1. Konvoluce funkcí

Definice 169. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. *Konvoluce funkce f s funkcí g* je funkce $f * g$ definovaná jako

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x - y)\, \mathrm{d}\mu(y)$$

pro taková $x \in \mathbb{R}^d$, pro která integrál konverguje.

Poznámka: kdykoliv f je lebesgueovsky měřitelná, pak funkce $y \mapsto f(x - y)$ je lebesgueovsky měřitelná (bez důkazu).

Věta 170. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g, h\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.*

(a) Operace $*$ je komutativní v následujícím smyslu: funkce $f * g$ a $g * f$ mají stejný definiční obor a jsou si na něm rovny.

(b) Operace $*$ je distributivní vzhledem ke sčítání v následujícím smyslu: platí $f*(g+h) = f*g+f*h$ a $(f+g)*h = f*h+g*h$ na definičních oborech pravých stran.

Lemma 171. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g \in L_1(\mu)$. Položíme-li $F(x, y) = f(y)g(x - y)$ pro $x, y \in \mathbb{R}^d$, pak $F \in L_1(\mu \times \mu)$ a $\|F\|_1 = \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Definice 172. Nechť $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ a $y \in \mathbb{R}^d$. Pak definujeme posun funkce f do bodu y jako funkci $\tau_y f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ danou předpisem $\tau_y f(x) = f(x - y)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Věta 173. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f \in L_p(\mu)$, $1 \le p < \infty$. Pak zobrazení $\tau\colon \mathbb{R}^d \to L_p(\mu)$ dané předpisem $\tau(x) = \tau_x f$ je stejnoměrně spojité.*

Věta 174. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$.*

(a) Je-li $f \in L_p(\mu)$ a $g \in L_q(\mu)$, kde $1 \le p, q \le \infty$ jsou sdružené exponenty, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^n$, je stejnoměrně spojitá a omezená a platí $\|f * g\|_\infty \le \|f\|_p \|g\|_q$.

(b) *Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a jestliže $g \in L_\infty(\mu)$ má kompaktní nosič, pak funkce $f * g$ je definována v každém bodě $\mathbb{R}^d$, je spojitá a platí* $\operatorname{supp} f * g \subset \operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g$.

(c) *Jsou-li f, g měřitelné, $D \subset \mathbb{R}^d$ měřitelná a $f * g$ je definována alespoň na D, pak $f * g$ je měřitelná na D.*

(d) *Jsou-li $f, g \in L_1(\mu)$, pak $f * g$ je definována μ-s. v. na $\mathbb{R}^d$, $f * g \in L_1(\mu)$ a platí $\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Poznámka: důkaz části (c) na přednášce vynechán.
Konec 23. přednášky

Definice 175. Nechť $d \in \mathbb{N}$. Pak $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ nazýváme *multiindexem* délky d. *Řádem multiindexu* α nazýváme číslo $\sum_{i=1}^d \alpha_i$ a značíme jej $|\alpha|$.

Je-li α multiindex délky d, pak symbolem D^α označíme parciální derivaci řádu $|\alpha|$ danou multiindexem α, tj.

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$$

(symboly ∂x_i^0 ve vyjádření výše vynecháváme). Speciálně, pro $\alpha = 0 = (0, \dots, 0)$ a $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je $D^0 f = f$. Symbol D^α se též nazývá diferenciální operátor.

Definice 176. Nechť $A \subset \mathbb{R}^d$. Množina

$$\mathcal{D}(A, \mathbb{K}) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{K});\ \operatorname{supp} \varphi \text{ je kompaktní podmnožina } A\}$$

se nazývá *prostor testovacích funkcí* na A.

Věta 177. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$ a $f, g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Je-li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mu)$ a $g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, pak $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $D^\alpha(f * g) = f * D^\alpha g$ pro každý multiindex α délky d.*

Definice 178. Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$. Funkci $g\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ budeme nazývat *regularizačním jádrem* (vzhledem k μ), pokud g je nezáporná, $g \in L_1(\mu)$ a $\|g\|_1 = 1$.

Věta 179. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, g je regularizační jádro na $\mathbb{R}^d$ a $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Položme $g_n(x) = n^d g(nx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.*

(a) *Pokud je f stejnoměrně spojitá a omezená na $\mathbb{R}^d$, potom $f * g_n \to f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

(b) *Pokud $f \in L_p(\mu)$ a $1 \leq p < \infty$, potom $f * g_n \xrightarrow{L_p} f$.*

Poznámka: důkaz části (b) na přednášce vynechán.

Důsledek 180. *Nechť μ je kladným násobkem Lebesgueovy míry na $\mathbb{R}^d$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a $1 \leq p < \infty$. Pak množina $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustá v prostoru $L_p(\Omega, \mu)$ (ve smyslu restrikce na Ω).*

2. Fourierova transformace

Pro $d \in \mathbb{N}$ položme $\mu_d = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \lambda_d$, kde λ_d je Lebesgueova míra na $\mathbb{R}^d$.

Definice 181. Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak *Fourierovou transformací funkce* f rozumíme funkci $\widehat{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ definovanou jako

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x\rangle} \, \mathrm{d}\mu_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x\rangle} \, \mathrm{d}\lambda_d(x)$$

pro $t \in \mathbb{R}^d$.

Definice 182. Prostorem $C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d) = C_{\mathrm{b}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme normovaný lineární prostor všech omezených spojitých funkcí na $\mathbb{R}^d$ s normou $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Definice 183. Prostorem $C_0(\mathbb{R}^d) = C_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{K})$ rozumíme prostor spojitých funkcí f na $\mathbb{R}^d$ takových, že pro každé $\varepsilon > 0$ je množina $\{x \in \mathbb{R}^d;\ |f(x)| \geq \varepsilon\}$ omezená. Na $C_0(\mathbb{R}^d)$ uvažujeme normu $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |f(x)|$.

Je-li $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$, pak řekneme, že $\lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = 0$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $R > 0$ takové, že $|f(x)| < \varepsilon$ kdykoli $x \in \mathbb{R}^d$, $\|x\| > R$.

Lemma 184 (Georg Friedrich Bernhard Riemann (1853), H. Lebesgue (1903))**.** *Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Pak*

$$\lim_{\|t\| \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i\langle t, x\rangle} \, \mathrm{d}\mu_d(x) = 0.$$

Konec 24. přednášky

Věta 185. *Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$ a $j \in \{1, \dots, d\}$. Fourierova transformace má následující vlastnosti:*

(a) $\widehat{f} \in C_0(\mathbb{R}^d)$ a $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$. Fourierova transformace je tedy spojité lineární zobrazení z prostoru $L_1(\mathbb{R}^d)$ do prostoru $C_0(\mathbb{R}^d)$.

(b) Nechť $y \in \mathbb{R}^d$. Pak $\widehat{\tau_y f}(t) = e^{-i\langle y,t\rangle}\widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$ a naopak pro funkci $h(x) = e^{i\langle y,x\rangle}f(x)$ platí $\widehat{h} = \tau_y \widehat{f}$.

(c) Je-li $c > 0$ a $h(x) = f(\frac{x}{c})$, pak $\widehat{h}(t) = c^d \widehat{f}(ct)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(d) Je-li $h(x) = \overline{f(-x)}$, pak $\widehat{h} = \overline{\widehat{f}}$.

(e) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\widehat{g}$.

(f) $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f} g \,\mathrm{d}\mu_d = \int_{\mathbb{R}^d} f\widehat{g} \,\mathrm{d}\mu_d$.

(g) Jestliže pro funkci $h(x) = -ix_j f(x)$ platí $h \in L_1(\mu_d)$, pak $\frac{\partial \widehat{f}}{\partial x_j}(t) = \widehat{h}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(h) Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ existuje všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(t) = it_j \widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

Lemma 186. *Nechť $f \in L_1(\mathbb{R}^d, \lambda)$, $g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ je omezená a $j \in \{1, \dots, d\}$. Jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j}$ existují všude na $\mathbb{R}^d$ a jestliže $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ a $\frac{\partial g}{\partial x_j} \in C_\mathrm{b}(\mathbb{R}^d)$, pak $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j} g \,\mathrm{d}\lambda = -\int_{\mathbb{R}^d} f \frac{\partial g}{\partial x_j} \,\mathrm{d}\lambda$.*

Poznámka: důkaz na přednášce pouze naznačen pro $d = 1$.

Příklad 187. Definujme funkci $g \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ předpisem $g(x) = e^{-\sum_{j=1}^d |x_j|}$. Pak $g \in L_1(\mu_d)$,

$$\widehat{g}(t) = \left(\tfrac{2}{\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \prod_{j=1}^{d} \frac{1}{1 + t_j^2},$$

funkce $\widehat{g}$ je nezáporná a $\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g} \,\mathrm{d}\mu_d = 1$.

Lemma 188. *Nechť $f, g \in L_1(\mu_d)$. Položme $g_n(x) = n^d \widehat{g}(-nx)$ a $h_n(x) = g(\frac{x}{n})$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $f * g_n(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)e^{i\langle t,x\rangle} h_n(t) \,\mathrm{d}\mu_d(t)$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$ a $n \in \mathbb{N}$.*

Konec 25. přednášky

Věta 189 (o inverzi)**.** *Nechť $f \in L_1(\mu_d)$. Je-li $\widehat{f} \in L_1(\mu_d)$, pak pro s. v. $x \in \mathbb{R}^d$ platí*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)e^{i\langle x,t\rangle} \,\mathrm{d}\mu_d(t) = \hat{\hat{f}}(-x).$$

Je-li navíc f spojitá, pak vzorec platí pro všechna $x \in \mathbb{R}^d$.

Důsledek 190. *Fourierova transformace $\mathcal{F} : L_1(\mu_d) \to C_0(\mathbb{R}^d)$ je prosté zobrazení. Je–li $g \in L_1(\mu_d)$ a $\widehat{g} \in L_1(\mu_d)$, pak $g \in \operatorname{Rng} \mathcal{F}$ a $\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \widehat{g}(-x)$ pro s.v. $x \in \mathbb{R}^d$.*

Důsledek 191. *Jsou-li $f, g \in L_1(\mu_d)$ takové, že $\widehat{f}, \widehat{g}, fg, \widehat{fg} \in L_1(\mu_d)$, pak $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$.*

Definice 192. Schwartzův prostor na $\mathbb{R}^d$ je definován následujícím způsobem:

$$\mathcal{S}_d = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C});\ PD^\alpha f \text{ je omezená pro každé } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ a každý polynom } P \text{ na } \mathbb{R}^d \right\}.$$

Lemma 193. *Pro $N \in \mathbb{N}$ je funkce $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N$ polynom na $\mathbb{R}^d$. Pro každý polynom P na $\mathbb{R}^d$ existují $N \in \mathbb{N}$ a $C > 0$ taková, že $|P(x)| \leq C(1 + \|x\|^2)^N$ pro každé $x \in \mathbb{R}^d$.*

Poznámka: na přednášce byl důkaz pouze naznačen

Lemma 194. *Nechť $d \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$, $N > \frac{d}{2p}$ a $h(x) = \frac{1}{(1+\|x\|^2)^N}$ pro $x \in \mathbb{R}^d$. Pak $h \in L_p(\mu_d)$.*

Poznámka: na přednášce byl důkaz pouze naznačen

Tvrzení 195. *Schwartzův prostor má následující vlastnosti:*

(a) $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}_d \subset C_0(\mathbb{R}^d) \cap \bigcap_{1 \leq p < \infty} L_p(\mu_d)$.

(b) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{R}^d$ a $h(x) = f(ax+b)$, pak $h \in \mathcal{S}_d$.

(c) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a α multiindex délky d, pak $D^\alpha f \in \mathcal{S}_d$.

(d) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a jestliže $g \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ je omezená a má omezené všechny parciální derivace všech řádů (speciálně, je-li $g \in \mathcal{S}_d$), pak $fg \in \mathcal{S}_d$.

(e) Je-li $f \in \mathcal{S}_d$ a $P\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ polynom, pak $Pf \in \mathcal{S}_d$.

Poznámka: na přednášce byl předveden pouze důkaz části (a)

Tvrzení 196. *Nechť $f \in \mathcal{S}_d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$.*

(a) $\widehat{D^\alpha f}(t) = (it)^\alpha \widehat{f}(t)$ pro každé $t \in \mathbb{R}^d$.

(b) $D^\alpha \widehat{f} = \widehat{m_\alpha f}$, kde $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

Definice 197. Pro $n \in \mathbb{N}_0$ a $f \in \mathcal{S}_d$ položme

$$\nu_N(f) = \max_{|\alpha| \leq N} \Big\| x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N \cdot D^\alpha f(x) \Big\|_\infty .$$

Definujeme dále funkci $\sigma : \mathcal{S}_d \times \mathcal{S}_d \to [0, \infty)$ předpisem

$$\sigma(f,g) = \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \min\big\{\nu_N(f-g), 1\big\}, \qquad f, g \in \mathcal{S}_d.$$

Věta 198. *$(\mathcal{S}_d, \sigma)$ je úplný metrický prostor splňující následující vlastnosti:*

(a) Je–li (f_n) posloupnost v $\mathcal{S}_d$ a $f \in \mathcal{S}_d$, pak $f_n \xrightarrow{\sigma} f$, právě když pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ platí, že

$$(1 + \|x\|^2)^N \cdot D^\alpha f_n(x) \to (1 + \|x\|^2)^N \cdot D^\alpha f(x) \quad \textit{stejnoměrně na } \mathbb{R}^d.$$

(b) Jestliže $f_n \to f$ v prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$, pak $f_n \to f$ v $L_p(\mu_d)$ pro každé $1 \leq p < \infty$.

(c) Je–li α multiindex délky d, P polynom na $\mathbb{R}^d$ a $g \in \mathcal{S}_d$, pak zobrazení $f \mapsto D^\alpha f$, $f \mapsto Pf$ a $f \mapsto gf$ jsou spojitá jakožto zobrazení z $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ do $(\mathcal{S}_d, \sigma)$.

Poznámka: důkaz na přednášce byl vynechán

Věta 199. *Fourierova transformace je homeomorfismus $\mathcal{S}_d$ na $\mathcal{S}_d$. Navíc, pro každé $f \in \mathcal{S}_d$ platí, že*

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x) \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}^d \quad a \quad \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}} = f.$$

Poznámka: důkaz na přednášce byl vynechán

Důsledek 200. *Pro $f, g \in \mathcal{S}_d$ platí $\widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$. Speciálně, prostor $\mathcal{S}_d$ je uzavřený na konvoluci.*

Poznámka: důkaz na přednášce byl vynechán

Věta 201 (Michel Plancherel, 1910)**.** *Existuje právě jedna lineární izometrie $F\colon L_2(\mu_d) \to L_2(\mu_d)$ na taková, že $F(f) = \widehat{f}$ pro každou $f \in L_2(\mu_d) \cap L_1(\mu_d)$.*

Poznámka: důkaz na přednášce byl vynechán
Konec 26. přednášky