I. TAYLORŮV POLYNOM

Připomeňme si definice elementárních funkcí:

a) $\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ b) $\cos(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ c) $e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

1. Dokažte, že Taylorův polynom k-tého řádu v bodě 0 pro funkce f je roven polynomu P:
(tyto výsledky lze dále považovat za známé rozvoje a používat je v dalších výpočtech)

a) $f(x)=(1+x)^a$ $(a\in\mathbb{R})$, $P(x)=\sum_{n=0}^{k}\binom{a}{n}x^n$, kde $\binom{a}{n}=\frac{a\cdot(a-1)\cdot(a-2)\cdots(a-n+1)}{n!}$
b) $f(x)=\log(1+x)$, $P(x)=\sum_{n=1}^{k}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$

2. Najděte Taylorův polynom k-tého řádu v bodě 0 pro funkce:

a) $\mathrm{tg}(x)$, $k=4$ b) $\cos(\sin x)$, $k=5$ c) $\sin(\sin x)$, $k=6$ d) $\sin(1-\cos x)$, $k=3$ e) $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$, $k=4$
f) e^{2x-x^2}, $k=5$ g) $\frac{x}{e^x-1}$, $k=4$ h) $\log(\cos x)$, $k=6$

3. Odhadněte absolutní chybu aproximace daných funkcí na daných intervalech:

a) $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$, $x\in[-1/2,1/2]$ b) $\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$, $x\in[0,1]$

4. Spočtěte $\sqrt{5}$ s přesností 10^{-4}

5. Spočtěte limity

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5})$
d) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$ e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$ $(a>0)$ f) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$
g) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-x^2\log(1+\frac{1}{x}))$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)$ i) $\lim\limits_{x\to\infty}((x^3-x^2+\frac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{x^6+1})$
j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$

6. Vyšetřete konvergenci řad

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{n}}+\log\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right]$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[2\,\mathrm{tg}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)-\sin\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)-\frac{1}{n}\right]$
c) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\log\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right)\right]$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}(e^{1/n}-1-\frac{1}{n})(\arcsin\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{n}})$
e) $\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{arctg}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n}-\arcsin\frac{1}{n}\right)$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}-\arcsin\frac{1}{n}\right)$

7. Jak je třeba zvolit koeficienty $a,b\in\mathbb{R}$, aby platil vztah $x-(a+b\cos x)\sin x=o(x^3), x\to 0$?

II. MOCNINNÉ ŘADY

1. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^7}{n+20}x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{(-1)^n n^2}x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$
e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^{\sqrt{n}}}x^n$ $(a>0)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{a^{n^2}}x^n$ $(a>1)$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a,b>0)$

i) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a^n}{n}+\frac{b^n}{n^2}\right)x^n$ $(a,b>0)$ j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$ (těžké na kružnici)

III. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE - ÚVOD

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. Příklady na integrování "přímo":

a) $\int x^9+\frac{1}{x}-5e^x+x^{-3}-\cos x\,\mathrm{d}x$ b) $\int 2e^{3x}-\sqrt[5]{5-x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^4}\,\mathrm{d}x$

2. Příklady na integrování pomocí substituce:

a) $\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x$ b) $\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x$ f) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}}\,\mathrm{d}x$ g) $\int \frac{1}{x\log x\log(\log x)}\,\mathrm{d}x$

3. Další příklady k procvičení:

a) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int (2^x+3^x)^2\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}}\,\mathrm{d}x$ f) $\int \frac{x^3}{x^8+1}\,\mathrm{d}x$

g) $\int \frac{1}{x^2}\sin(\frac{1}{x})\,\mathrm{d}x$ h) $\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x$ i) $\int \frac{2x}{2+2x^2+x^4}\,\mathrm{d}x$ j) $\int \frac{\sin x}{1+\sin^4 x}\cos x\,\mathrm{d}x$

4. Příklady na integrování "per partes":

a) $\int x^3\sin x\,\mathrm{d}x$ b) $\int e^x\cos x\,\mathrm{d}x$ c) $\int \log x\,\mathrm{d}x$ d) $\int x^n e^x\,\mathrm{d}x$, $n\in\mathbb{N}$ e) $\int x\log x\,\mathrm{d}x$ f) $\int xe^x\cos x\,\mathrm{d}x$

5. Další příklady k procvičení:

a) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{x^2}{(8x^3+27)^{2/3}}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{2^{2x}}{9^x-4^x}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ f) $\int x^2\sin(2x)\,\mathrm{d}x$

g) $\int \sqrt{x}\log^2 x\,\mathrm{d}x$ h) $\int x^2e^{-2x}\,\mathrm{d}x$ i) $\int \left(\frac{\log x}{x}\right)^2\,\mathrm{d}x$ j) $\int x^5e^{x^3}\,\mathrm{d}x$ k) $\int e^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ l) $\int x\sin\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

6. Příklady na integrování pomocí druhé věty o substituci:

a) $\int \sqrt{4-x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$

d) $\int \sqrt{\frac{x+a}{a-x}}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$ e) $\int x\sqrt{\frac{x}{2a-x}}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$

7. Příklady, kde se musí funkce "lepit":

a) $\int |x|\,\mathrm{d}x$ b) $\int |\cos x|\,\mathrm{d}x$ c) $\int \sqrt{x^6}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \sin|2x-1|\,\mathrm{d}x$ e) $\int |\sin x+\cos x|\,\mathrm{d}x$

f) $\int \max\{x,x^2\}\,\mathrm{d}x$ g) $\int e^{-|x|}\,\mathrm{d}x$ h) $\int |2x+1|\,\mathrm{d}x$ i) $\int \arcsin\sin\frac{4x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$

IV. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE - INTEGRACE RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. Příklady na "integrování racionálních funkcí":

a) $\int \frac{1}{(2x+3)(3x+2)(x+1)}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{5x^3+3x^2-x-1}{x^2+2x+1}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x$

f) $\int \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^3-3x^2+3x-1}\,\mathrm{d}x$

2. Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

a) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{x\sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{1}{(1+e^x)^2}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2}\,\mathrm{d}x$ f) $\int \frac{1}{1+e^{x/2}+e^{x/3}+e^{x/6}}\,\mathrm{d}x$

g) $\int \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{x-1}}$

3. Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

a) $\int \frac{1}{\sin x+\operatorname{tg} x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\sin^2 x+\sin x\cos x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{\sin^3 x+\sin x}{\cos^3 x+\cos x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{1}{\cos^2 x(4\sin^2 x-1)}\,\mathrm{d}x$ e) $\int \frac{1}{(2+\cos x)\sin x}\,\mathrm{d}x$
f) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$ g) $\int \frac{\sin x}{\sin^3 x+\cos^3 x}\,\mathrm{d}x$

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

4. a) $\int \frac{1}{5+\cos x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{(\sin^2 x+2\cos^2 x)^2}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{1}{2\sin x-\cos x+5}\,\mathrm{d}x$
e) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$ f) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$

5. a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-2}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x$ $(a>0)$ c) $\int \frac{1}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{x^2-3x+2}}\,\mathrm{d}x$

6. Převeďte "$\int \sqrt{x^2-3x+1}\,\mathrm{d}x$" na integrál z racionální funkce pomocí následujících substitucí: a) $t=\sqrt{x^2-3x+1}-x$ b) $t=\sqrt{x^2-3x+1}+x$ c) "$t=\sqrt{\frac{x-x_1}{x-x_2}}$"

7. BONUS - příklady ze zkouškových písemek na FSV:

a) $\int \frac{2x}{(2x+3)(\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{2x+3})}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x(\sin^2 x+1)}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{(\sqrt{x^2+x+7}-x)^3+\sqrt{x^2+x+7}-x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{\cos x-1}{\sin x-1}\,\mathrm{d}x$

8. BONUS - příklady ze zkouškových písemek na MFF:

a) $\int \frac{1}{(e^{2x}+e^x-2)(e^{2x}+1)}\,\mathrm{d}x$ b) $\int \frac{\sin x}{\sin x+\cos x-3}\,\mathrm{d}x$ c) $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x}}\,\mathrm{d}x$ d) $\int \frac{2\log^2(x)+3}{x\log^4(x)-x\log^2(x)-6x}\,\mathrm{d}x$

V. NEWTONŮV INTEGRÁL

Vypočtěte následující Newtonovy integrály

1. a) $\int_0^2 |1-x|\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^{\log 2} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^{2\pi} x^2\cos x\,\mathrm{d}x$ d) $\int_{\frac{1}{e}}^{e} |\log x|\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x}\,\mathrm{d}x$
f) $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ g) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$ h) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\varepsilon\cos x}\,\mathrm{d}x, \varepsilon\in[0,1)$ i) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$, $ab\neq 0$
j) $\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ k) $\int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$

2. a) $\int_4^\infty \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x-2}{x-4}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{-x^2+4x-3}}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_{-1}^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^{5\pi} \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
e) $\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{1}{\sin x\sqrt{1+\cos x}}\,\mathrm{d}x$

3. Vypočtěte následující integrály

a) $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 \frac{1}{1+\sqrt{\frac{1+x}{x}}}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^{6\pi} x\frac{\sin(x^2)}{2+\sin(x^2)}\,\mathrm{d}x$
d*) $\int_1^e \frac{1}{x}\operatorname{tg}^2\sqrt{\log(x^2)+1}\,\mathrm{d}x$ (počítejte jako "zobecněný Riemanův integrál")

4. Vypočtěte plochy ohraničené následujícími křivkami

a) $f(x)=x^2,\ g(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,1]$ b) $f(x)=x^n,\ g(x)=\sqrt[n]{x},\ x\in[0,1],\ n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$
c) $f(x)=\sin x,\ g(x)=-\sin x,\ x\in[0,\pi]$ d) $f(x)=x^2,\ g(x)=\frac{1}{x},\ h(x)=0,\ x\in[0,\infty)$
e) $f(x)=\sqrt{1-x^2},\ g(x)=-\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1]$

VI. MOCNINNÉ ŘADY - SČÍTÁNÍ ČÍSELNÝCH ŘAD

1. Sečtěte řady všude na intervalu konvergence:

a) $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{4n+5}}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^\infty nx^n$ c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n(n+1)}$ d) $\sum_{n=1}^\infty n^2x^n$ e) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n+1}n^2x^n$ f) $\sum_{n=1}^\infty n(n+2)x^n$ g) $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ h) $\sum_{n=0}^\infty \frac{x^{4n}}{(4n)!}$ i) $\sum_{n=1}^\infty (n-1)(n+3)x^{2n}$ j) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^{n-1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$ k) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2-1}{3^n\,n!}\,x^n$

2. Sečtěte řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{3^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$
g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2-1}$ h) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)2^n}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{2^n\ n!}$

3. Vyjádřete následující funkce jako mocninnou řadu o středu 0:
a) e^{-x^2} b) $\operatorname{arctg} x$ c) $\sin^2 x$ d) $\frac{x^{10}}{1-x}$ e) $(1+x)\log(1+x)$

VII. KONVERGENCE NEWTONOVA INTEGRÁLU

1. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů
a) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^2)^5}}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x}-1}\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^1 \frac{1}{e^x-\cos x}\,\mathrm{d}x$ f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\log\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
g) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^p x \cos^q x}\,\mathrm{d}x$ h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin^q x(1-\sin x)^p}\,\mathrm{d}x$ i) $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}\log(1+e^x)}\,\mathrm{d}x$ j) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$ k) $\int_0^{\infty} x^p e^{-\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$

2. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů
a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos x}{x^m}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha > 1)$ c) $\int_1^{\infty} x^k \frac{x-\sin x}{x+\sin x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^{\infty} x^\alpha \operatorname{arctg}^\beta x\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^\alpha\,\mathrm{d}x$
f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^\alpha \left(\frac{\pi}{2}-x\right)^\beta \operatorname{tg}^\gamma x\,\mathrm{d}x$ g) $\int_2^{\infty} \frac{1}{x^p \ln^q x}\,\mathrm{d}x$

3. Pomocí B-C podmínky ukažte, že následující integrály nejsou konvergentní:
a) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha \leq 0)$ b) $\int_1^{\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_1^{\infty} \frac{|\cos x|}{x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_\pi^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$

4. Pomocí metod "per partes" a "substituce" rozhodněte o konvergenci následujících integrálů:
a) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha \in (0,1])$ b) $\int_0^{\infty} \sin(x^2)\,\mathrm{d}x$

5. Vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) následujících integrálů:
a) $\int_0^{\infty} 2x\cos\left(x^4\right)\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}\cos x}{x+8}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x}\frac{x^2}{x^2+1}\operatorname{arctg} x\,\mathrm{d}x$ (stačí vyšetřit neabsolutní konvergenci) e) $\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x)}{x}\cos x\,\mathrm{d}x$

6. BONUS - příklady ze zkouškových písemek na MFF:

a) $\int_0^{\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x \frac{\sin(\sqrt{x})}{x}\,\mathrm{d}x$ U tohoto příkladu můžete bez ověřování použít informaci, že existuje okolí nekonečna, na kterém je funkce $(1+1/x)^x$ rostoucí.

b) $\int_1^{\infty} \frac{(x^3-1)(\log x)^\alpha}{(2+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ c) $\int_0^{\infty} \cos(x^\alpha+1)\,\mathrm{d}x$

VIII. METRICKÉ PROSTORY

1. Ověřte, zda následující formule definují metriku na $\mathbb{R}$:
a) $\rho(x,y) = |x^3-y^3|$ b) $\rho(x,y) = |x^2-y^2|$ c) $\rho(x,y) = (x-y)^2$

2. Ať ρ_1, ρ_2 jsou metriky na množině P. Musí být i funkce ρ definovaná níže metrikou na P?
a) $\rho = \rho_1 + \rho_2$ b) $\rho = \max\{\rho_1, \rho_2\}$ c) $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2\}$ d) $\rho = \max\{\rho_1, 1\}$ e) $\rho = \min\{\rho_1, 1\}$

3. Na množině $\mathcal{P} = \{A \subset \mathbb{N} :\ A \text{ je konečná}\}$ definujme $\rho(A,B) = |(A\setminus B)\cup(B\setminus A)|$ pro $A, B \in \mathcal{P}$. Je ρ metrika?

4. Na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ uvažujme supremovou metriku, tj. $\rho_s(f,g) = \max\{|f(t)-g(t)| :$

$t \in [0,1]\}$. **Spočítejte** $\rho_s(x, x^2)$.

5. Na prostoru $\mathcal{C}([0,1])$ **uvažujme integrální metriku, tj.** $\rho_i(f,g) = \int_0^1 |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x$.
a) Spočítejte $\rho_i(x, x^2)$. b) Pro jaké $a \in (0,1)$ je vzdálenost $\rho_i(ax, x^2)$ nejmenší možná?

6. Ať (P, ρ) je metrický prostor, $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ je funkce splňující

(i) $f(x) = 0 \leftrightarrow x = 0$

(ii) $r \le s + t \to f(r) \le f(s) + f(t)$

Položme $\sigma(x,y) = f(\rho(x,y))$. Dokažte, že σ je potom metrika na P.

Pomocí tohoto tvrzení dokažte, že $\sigma(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$ je metrika na P.

7. Řekneme, že ρ je *pseudometrika* na P, pokud pro každé $x, y, z \in P$ platí

$$\rho(x,x) = 0,\ \rho(x,y) = \rho(y,x),\ \rho(x,z) \le \rho(x,y) + \rho(y,z).$$

Nechť na množině P máme posloupnost pseudometrik ρ_n, $n \in \mathbb{N}$ splňující

$$\forall x, y \in P,\ x \ne y\ \ \exists n \in \mathbb{N}: \quad \rho_n(x,y) \ne 0.$$

Dokažte, že potom $\rho(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{\rho_n(x,y), 1\}$ definuje metriku na P.

Toto tvrzení aplikujte na důkaz toho, že pokud na $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ definuji $\rho_n(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [-n, n]\}$, pak $\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{\rho_n(f,g), 1\}$ je metrika na $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.

8. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené (resp. uzavřené). Zjistěte jejich vnitřek, uzávěr a hranici.
a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0,\ y \le 0\}$ b) $B = \{f \in \mathcal{C}[0,1] :\ f(\frac{1}{2}) = 2\}$
c) $C = \{f \in \mathcal{C}[0,1] :\ f(\frac{1}{2}) \in (0,2)\}$ d) $D = \{f \in \mathcal{C}[0,1] :\ \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0\}$

9. Platí v metrických prostorech následující rovnosti? Platí alespoň jedna inkluze?
a) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ b) $\mathrm{Int}(A \setminus B) = \mathrm{Int}(A) \setminus \mathrm{Int}(B)$ c) $H(A) = \overline{A} \setminus A$ (uvažujte A otevřenou)

10. Uvažujme na $\mathbb{R}^2$ **libovolnou metriku** ρ. **Která z následujících tvrzení jsou pravdivá? Která jsou pravdivá, pokud** $\rho(x,y) = \|x - y\|$ **pro nějakou normu na** $\mathbb{R}^2$**?**
a) $5B(0,1) = B(0,5)$ (0 značí nulový vektor, $5A$ definujeme jako mnozinu $\{5a :\ a \in A\}$ pro $A \subset \mathbb{R}^2$)
b) $5B(x,1) = x + B(0,5),\ x \in \mathbb{R}^2$ c) $\mathrm{Int}(\overline{B}(0,1)) = B(0,1)$ d) $\overline{B(0,1)} = \overline{B}(0,1)$

11. Ať P **je metrický prostor,** $x \ne y$ **jsou dva body z** P**. Dokažte:**
a) $\{x\}$ je uzavřená množina. b) Exi stují disjunktní otevřené množiny U, V že $x \in U$ a $y \in V$.

12. Dokažte následující ekvivalence pro uzavřenou množinu A **v metrickém prostoru** P**:**

$$\mathrm{Int}(A) = \emptyset \leftrightarrow \overline{P \setminus A} = P,$$

$$\mathrm{dist}(x, A) = 0 \leftrightarrow x \in A \qquad \text{(platí toto tvrzení i když } A \text{ není uzavřená?)}$$

13. Ať $A \subset P$ **je podmnožina metrického prostoru** (P, ρ)**. Dokažte:**
a) $\mathrm{Int}(A) = \bigcup\{U \subset A :\ U \text{je otevřená}\}$ b) $\overline{A} = \bigcap\{F \supset A :\ F \text{ je uzavřená}\}$

IX. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH - LIMITY A SPOJITOST

1. Lze následující funkce spojitě rozšířit na $\mathbb{R}^2$?

a) $\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ b) $\frac{\sqrt{x^2y^2+1}-1}{x^2+y^2}$ c) $\frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$ d) $\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$ e) $\frac{x^3-y^3}{x-y}$

f) $(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$ g) $\frac{2xy}{x^2+y^2}$ h) $\frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ i) $\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ j) $(1+x^2y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$ k) $(x^2+y^2)^{x^2y^2}$

X. FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH - DERIVACE

1. Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují

a) $x^m y^n$ b) e^{xy} c) $xy+yz+zx$ d) $|x|\cdot|y|$ e) $|y+\cos x|$ f) $|\sin y-\sin x|$ g) $|\cos y-\sin x|$

h) $\left(\frac{x}{y}\right)^z$ i) $x^{\frac{y}{z}}$ j) $\sin(x^y)$ k) $f(x,y)=e^{\frac{-\pi}{x^2+3xy+3y^2}}$, $f(0,0)=0$ l) $\sqrt{x+y^2}$ m) $\sqrt{x^2-y^2}$

2. Mají následující funkce totální diferenciál v bodě $[0,0]$? (pokud v tomto bodě funkce není definována, spojitě ji dodefinujte)

a) $\sqrt{x^2+y^2}$ b) $\sqrt[3]{x+y^2}$ c) $|xy|$ d) $\sqrt[3]{x^3+y^3}$ e) $(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ f) $e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$ g) $\frac{x^2y(|x|+|y|)}{x^4+y^2}$

3. Spočtěte gradient následujících funkcí všude, kde existuje:

a) $\log(\sqrt{x^2+y^2})$ b) e^{xy} c) $\frac{x}{y}$

4. Předpokládejte, že x, y mají malou absolutní hodnotu. Odvoďte přibližné vzorce pro následující výrazy:

a) $(1+x^m)(1+y^n)$ b) $\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1+xy}$

5. Objem válce s podstavou o poloměru r a výšce h je dán vzorcem $V=\pi r^2 h$. Je-li výška $h=5\ cm$ změřena s přesností na $0.005\ cm$ a poloměr podstavy $r=3\ cm$ je změřen s přesností na $0.01\ cm$, určete, s jakou největší možnou chybou je určen objem válce V.

6. Spočtěte gradient následujících funkcí všude, kde existuje:

a) $|y-\sin x|$ b) $|\sin y-\sin x|$ c) $\left(\frac{x}{y}\right)^z$ d) $x^{\frac{y}{z}}$ e) x^{y^z} f) $f(x,y)=e^{-\frac{1}{x^2+xy+y^2}}$, $f(0,0)=0$

7. Spočítejte přibližně tak, že nahradíte přírustek vhodné funkce jejím diferenciálem:

a) $\sqrt[3]{(1.02)^3+(1.97)^3}$ b) $0.97^{1.05}$ c) $1.04^{2.02}$ d) $\frac{(1.03)^2}{\sqrt[3]{0.98\sqrt[4]{(1.05)^3}}}$ e) $1.002\cdot(2.003)^2\cdot(3.004)^3$