I. OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY, VÝROKY

1. Řešte následující nerovnosti a rovnosti v $\mathbb{R}$:

a) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$; b) $\frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}$; c) $\log_{\frac{1}{8}}(x^2-3x+3) \geq 0$; d) $\log(x^2+1) = 2\log(3-x)$;
e) $\sin 2x < \cos x$; f) $x \leq \left|\frac{x+2}{x-3}\right|$; g) $|x-|x+1|| \leq 2x$;
h) $|x-|x-1|| = 1-|x|$; i) $\frac{x^2+2}{x+7} < 2(x-7)$; j) $\log_7(49x^2) = 4\cdot(\log_7 x)^2$.

2. Dokažte:

a) Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$: $||a|-|b|| \leq |a-b|$; b) Pro každé $a, b \in \mathbb{R}$: $|a+b| \leq |a|+|b|$.

3. Načrtněte graf funkce

a) $f(x) = 1-|\cos\frac{x}{2}|$; b) $g(x) = \frac{1}{2}+\cos(\frac{\pi}{2}+|x|)$; c) $h(x) = ||||x|-1|-1|-1|$;
d) $i(x) = \left|\frac{3x+3}{2x-4}\right|$; e) $j(x) = |\log|1-x||$.

4. V závislosti na parametru $c \in \mathbb{R}$ určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí:

a) $cx^2+x+1 > 0$ b) $ce^x \in (-1,0]$ c) $|\cos x|-c > 0$ d) $\log|x|+c \in (-\pi/2, \pi/2)$

5. Nechť M značí množinu všech mužů a Z množinu všech žen. Uvažujme následující výrokové formy:
$S(m,z)$: „Muž m je manželem ženy z.";
$L_1(m,z)$: „Muž m miluje ženu z."; $L_2(m,z)$: „Žena z miluje muže m.".
Pomocí kvantifikátorů, logických spojek a forem S, L_1 a L_2 zapište následující výroky:
a) Každý ženatý muž miluje svou manželku. b) Každou ženu miluje nějaký muž.
c) Každá žena má nejvýš jednoho manžela.
d) Každý muž má nejvýš jednu manželku. (Říká tento výrok totéž, co c)?)
e) Existuje vdaná žena. f) Existuje ženatý muž. (Říká tento výrok totéž, co e)?)
g) Existují nevěrné manželky. (Manželku prohlásíme za nevěrnou, pokud miluje jiného muže než svého manžela.)
Následující výroky přeložte do češtiny.
h) $\exists m \in M \forall z \in Z(\neg S(m,z))$;
i) $\exists z \in Z \forall m \in M(L_1(m,z) \Rightarrow \neg L_2(m,z))$;
j) $\exists z \in Z \forall m \in M(L_2(m,z) \Rightarrow \neg L_1(m,z))$;
k) $\forall z \in Z((\exists m \in M : L_2(m,z)) \Rightarrow (\exists m \in M : L_1(m,z)\ \&\neg L_2(m,z))$.

6. Uvažme následující výroky:

(i) $\forall x \in M\ \exists y \in M\ \exists z \in M \quad x = y+z$ (ii) $\exists y \in M\ \forall x \in M\ \exists z \in M \quad x = y+z$

(iii) $\exists y \in M\ \exists z \in M\ \forall x \in M \quad x = y+z$

Které z nich jsou pravdivé a které nepravdivé, je–li
a) $M = \mathbb{N}$ b) $M = \mathbb{N} \cup \{0\}$ c) $M = (0,1)$ d) $M = \{0\}$?

7. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.
a) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\,(z > x \Rightarrow y < z)$; b) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ (z > x \Rightarrow y < z)$;
c) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\,(z > x \Rightarrow y < z)$; d) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\,(z < x \Rightarrow y > z)$;
e) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R}\,(|y-x| < \delta \Rightarrow y < x+\frac{\varepsilon}{3})$.

8. Vyjádřete co nejjednodušeji:
a) $\forall \varepsilon > 0\ \forall y \in \mathbb{R} : |y-7| < 5 \Rightarrow |f(y)-15| < \varepsilon$;
b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 1 \forall y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} : |y-x| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{1}{n}$.

II. DŮKAZOVÁ TECHNIKA, OPERACE S MNOŽINAMI, BINÁRNÍ RELACE A ZOBRAZENÍ

1. (Bernoulli) Nechť $x \in \mathbb{R}$, $x \geq -1$, $n \in \mathbb{N}$. Pak platí Bernoulliova nerovnost

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dokažte matematickou indukcí. Indukcí s krokem „$n \to n{+}2$" dále ukažte, že uvedená nerovnost platí i pro $x \geq -2$. Ukažte na příkladě, že pro $x < -2$ a obecné $n \in \mathbb{N}$ již Bernoulliova nerovnost neplatí.

2. Dokažte indukcí: a) $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$ b) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (1+2+\ldots+n)^2$ c) $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, q \neq 1$
d) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ e) Pro $x_1, \ldots, x_n \in [0,\pi]$ platí, že $\left|\sin\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \sin(x_i)$

3. Platí pro libovolné množiny A, B a C následující vztahy? Své tvrzení dokažte.
a) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$ b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ c) $(A \cap B) \setminus (B \cap C) = (C \cap B) \setminus (A \cap C)$
d) $(A \cap B) \setminus (B \cap C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ e) $(A \cup B) \setminus C = A \setminus (C \cup B)$

4. Nechť $p \in \mathbb{N}$. Dokažte, že relace *kongruence modulo* p definovaná předpisem

$$m \equiv n \pmod{p} \quad \Longleftrightarrow \quad |m-n| \text{ je dělitelné číslem } p,$$

je ekvivalence na $\mathbb{N}$.

5. Nechť A je množina všech funkcí z intervalu $[0,1]$ do $\mathbb{R}$ a nechť $\leq$ je relace definovaná předpisem

$$f \leq g \iff \forall\, x \in [0,1]: \ f(x) \leq g(x).$$

Dokažte, že $\leq$ tvoří na množině A částečná uspořádání, které není lineární.

6. Dokažte, že je-li X množina, označme $\mathcal{P}(X) := \{A : \ A \subset X\}$. Pak relace

$$R = \{[A,B] \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) : \ A \subset B\}$$

je částečné uspořádání na $\mathcal{P}(X)$, které obecně není lineární.

7. Uvažujme relaci $\triangle := \{[A,B] \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \ A \cap B \neq \emptyset\}$. Rozhodněte, zda je $\triangle$ reflexivní, symetrická, tranzitivní, antisymetrická, slabě antisymetrická. Své tvrzení dokažte.

8. Nechť $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $D(f) = \mathbb{N}$. Rozhodněte o platnosti následujících tvrzení:

(i) Je-li $f(\mathbb{N})$ konečná, není f prosté.

(ii) Je-li $f(\mathbb{N})$ nekonečná, je f prosté.

(iii) Je-li $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$, je f prosté.

(iv) Je-li f prosté, je $\mathbb{N} \setminus f(\mathbb{N}) = \emptyset$.

9. Určete definiční obor a obor hodnot funkcí a) $f(x) := x - \sqrt{x^2-1}$ b) $g(x) := \frac{2\sqrt{x}}{4-\sqrt{x}}$

III. AXIOMY TĚLES, USPOŘÁDANÝCH TĚLES, SUPREMA, INFIMA

1. Dokažte, že pro každé těleso $(T, +, \cdot, 0, 1)$ platí:

a) $\forall x, y, z \in T: \quad x + y = x + z \Rightarrow y = z$; b) Nechť $x \in T, x \neq 0$. Pak opačný prvek $(-x)$ a inverzní prvek $\frac{1}{x}$ jsou jednoznačně definovány. c) $\forall x \in T: \ x \cdot 0 = 0$; d) $-0 = 0$;
e) $\forall a \in \mathbb{R}: \ -(-a) = a$; f) $\forall a \in T: \ -a = (-1) \cdot a$; g) $\forall a, b \in T: \ (-a)b = -(ab) = a(-b)$;
h) $\forall x, y \in T: \ (-x)(-y) = xy$; i) $\forall a, b \in T: \ ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$;
j) $\forall x, y \in T \setminus \{0\}: \ (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

2. Dokažte, že pro každé uspořádané těleso $(T, +, \cdot, 0, 1)$ a pro $x, y \in T$ platí:

a) $0 < 1$; b) $0 < x \Rightarrow 0 < \frac{1}{x}$; c) $x < y \Rightarrow x < \frac{x+y}{2} < y$, kde $2 = 1 + 1$; d) $0 < x < y \Rightarrow 0 < \frac{1}{y} < \frac{1}{x}$;
e) $x \neq 0 \Rightarrow x \cdot x > 0$; f) $x < 0 < y \Rightarrow xy < 0$; g) $0 < x < 1 \Rightarrow x \cdot x < x$;
h) $\forall n \in \mathbb{N}: \ 0 \leq x < y \Rightarrow x^n < y^n$; i) $x \geq 0 \Rightarrow -x \leq 0$;
j) $\forall z, w \in T \setminus \{0\}: \ \frac{x}{z} \cdot \frac{y}{w} = \frac{xy}{zw}$; k) $\forall z, w \in T \setminus \{0\}: \ \frac{x}{z} + \frac{y}{w} = \frac{xw+yz}{zw}$

3. Najděte suprema a infima následujících množin (pokud existují). Existují maxima a minima?

a) $A = \{-\frac{1}{n}; \ n \in \mathbb{N}\}$; b) $B = \{\frac{n+(-1)^n}{n}; \ n \in \mathbb{N}\}$;
c) $C_1 = \{n^2 - m^2; \ n, m \in \mathbb{N}\}$, $C_2 = \{n^2 - m^2; \ n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$, $C_3 = \{n^2 - m^2; \ n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$;
d) $D_1 = \{2^{-n} + 3^{-n}; \ n \in \mathbb{N}\}$, $D_2 = \{2^{-n} + 3^{-n}; \ n \in \mathbb{Z}\}$;
e) $E = \{n^{(-1)^n}; \ n \in \mathbb{N}\}$; f) $F = \{5^{(-1)^j 3^k}; \ j \in \mathbb{Z}, \ k \in \mathbb{Z}\}$;

4. Nechť $A, B \subset \mathbb{R}$ jsou neprázdné omezené množiny. Dokažte, že

a) $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$, b) $\sup(-A) = -\inf A$ a $\inf(-A) = -\sup A$
c) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$, d) $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

IV. LIMITY POSLOUPNOSTÍ

1. Určete, zda je posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ monotónní a (jednostranně) omezená:

a) $\frac{n^2-1}{n}$ b) n^{1-n} c) $\sin(\frac{n\pi}{4})$

2. Vypočtěte přímo z definice limity:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n}{n^3+3}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \dfrac{2n}{n^3+1} = 0$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n\frac{\pi}{7})}{n^2} = 0$

3. Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá vlastní limitu: a) $a_n = 2^{(-1)^n n}$ b) $a_n = (-1)^n \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{n}\right)$

4. Spočtěte následující limity posloupností: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+11}-\sqrt[3]{n}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+(n+1)^2}{(n+3)^2+(n+4)^2}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)^{27}-(n+1)^{27}}{(2n^2+5)^{13}-(n^2-1)^{13}}$ j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2-1)(n+2)^3-n^2}{3n(n^2+5)(n^2+1)}$ k) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-1})$ m) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+1})$ n) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n+2}-\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}}$

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}-n-1}{\sqrt{n}}$ p) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}{n+1}}$

5. Spočtěte následující limity posloupností($[\cdot]$ značí celou část):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^5+2^n+17^n}{n!+n+3^n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+[\sqrt[3]{n}]^3}{n-[\sqrt{n+9}]}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+n^5+n!}{n(n^6+n!)}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4^n+n^8-4n!}{5n!-3^n+n^9}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+4^n+3^n+2^n}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$ g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}[kx]$, $x \in \mathbb{R}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}}{n+1}}$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}-\sqrt{3^n+2^n}}$ j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{\sqrt[2n]{4^n+\sqrt{n}}}$

6. Spočtěte následující limity posloupností pomocí Stolzovy věty: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^k+3^k+\ldots+(2n-1)^k}{n^{k+1}}$, $k \in \mathbb{N}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1}\right)$, $k \in \mathbb{N}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log n}{n}$

7. Spočtěte limity posloupností: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{100+2n}\right)^n$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{99}{100}+\frac{5}{n}\right)^n$

8. Pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ určete hodnoty $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$:

a) $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cos(n\pi)$ b) $a_n = \frac{2n(-1)^n}{n+1} + \sqrt[n]{2}$ c) $a_n = \sqrt[n]{1+2^{n(-1)^n}}$

9. Spočtěte limity posloupností (jedná se o ukázkové příklady ke druhému zápočtovému testu):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n+\sin\frac{n\pi}{4}-\cos\frac{n\pi}{3}}{\sqrt[n]{n^3}-1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n-[\sqrt[3]{(n+1)!}\,]}{3n^3-[\sqrt[3]{n!}\,]}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{[n^4\cos n]-n^2 3^n+4^n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5+\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n+1}} - \cos\frac{n\pi}{4}\right)\frac{2n}{1-\sqrt[n]{2n}}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[6]{n^5+1}-\sqrt[5]{n^4-n^3}+\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt{n-\sqrt{n}}}$

g) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$

10. Spočtěte následující limity posloupností (příklady ze zkouškových písemek na FSV):

a) $\lim\limits_{n\to\infty}((n^{10}+n^3)^7-(n^7+1)^{10})\cdot\left(\sqrt[3]{(1+\frac{1}{n^9})^7}-1\right)^7$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+\frac{2}{n})^{30}-(n+\frac{1}{n})^{30}}{\sqrt{(2+n^7)^8-2^8}}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{n}\sqrt[n]{(n+1)^n+n^{n+1}}}{[\sqrt{n}]+[2\sqrt{n}]+\cdots+[n\sqrt{n}]}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(25+\frac{1}{n}\right)^6-\left(5+\frac{1}{n}\right)^{12}\right)\cdot\sqrt[6]{(n+2)^7-(n-1)^7}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}((n^5+2)^{25}-(n+5)^{125})\cdot\left(\left(1+\frac{1}{25n^4}\right)^{125}-1\right)^{31}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^5+17\sqrt[6]{n}}-\sqrt{n^5-5\sqrt[6]{n}+1}}{\sqrt[3]{n^5+18n-16}-\sqrt[3]{n^5-9n}}$

V. ŘADY

1. Určete, zda konvergují následující řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^k}{k!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(k!)^2}{(2k)!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{kx}}{k}, x\in\mathbb{R}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{kx}}{k^2}, x\in\mathbb{R}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{k-1}{k+1})^{k(k-1)}$
f) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{k^2+1}-\sqrt{k^2-1})$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{k^2+1}-\sqrt[3]{k^2-1})$ h) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2k^2+3k+4}{2k^3}$
j) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^8}{3^k+5^k}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{k^5}{5^k}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[9]{k^{10}}+\sqrt[10]{k^9}}{\sqrt[9]{k^{11}}+\sqrt[11]{k^9}}$

2. Za pomoci Raabeho kritéria (viz. níže) určete, zda konvergují následující řady:

Věta (Raabeovo kritérium)**.** Nechť $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ je řada s kladnými členy.

(i) Je-li $\lim n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)>1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konvergentní.

(ii) Je-li $\lim n(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)<1$, pak je $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ divergentní.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})\cdots(2+\sqrt{n})}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdots(3n-2)}{3\cdot6\cdot9\cdots(3n)}$

3. Určete, zda následující řady konvergují absolutně:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(n^2+3n)\frac{4^n+3^n}{5^n+2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[9]{n^{10}}+\sqrt[10]{n^9}}{\sqrt[9]{n^{11}}+\sqrt[11]{n^9}}$

4. Vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) následujících řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}\log n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(n^2)(\sqrt{n^6+n}-n^3)$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}\cos(\frac{1}{n})$
d) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}\cos(\frac{1}{n})$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\log n}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log n}{n^2}\cos\left(\frac{\sin n+8}{n^8}\right)$ g) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\log n}\cos\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$

5. Vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) následujících řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n\sin n}{n^2+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n+\frac{1}{n})}{\log(\log n)}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n)}{\log n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2+3n+4}{2n^4+3}$

VI. LIMITA FUNKCÍ

1. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (příklady na podíly polynomů):

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ c) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x(x-2)^2} - \dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4} + \dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$

2. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (příklady na výrazy s odmocninami):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^n}$, $n \in \mathbb{Z}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt[3]{x^3+7}}{(x-1)^n}$, $n \in \mathbb{Z}$ c) $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

d) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9}$

3. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (příklady na použití známých limit $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $\frac{\log x}{x-1} \to 1$, $\frac{e^x-1}{x} \to 1$ a VOLSF):

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (tuto limitu dále lze považovat za „známou“) c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(\cos x)}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log(1+x)}{x}$ (tuto limitu dále lze považovat za „známou“) e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin^2 x}-\cos x}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^3 x}$

g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$ h) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$ i) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ j) $\lim\limits_{x\to 0} \left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2 x}$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ m) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$

n) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$ o) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$ p) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ q) $\lim\limits_{x\to 0} (x+e^x)^{\frac{1}{x^2}}$

4. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\log\left(x^2-x+1\right)}{\log(x^{10}+x+1)}$ b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin(x-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$ c) $\lim\limits_{x\to \infty} (\sin\sqrt{x+1} - \sin\sqrt{x})$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to \infty} \frac{\log\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\log\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$ f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x - \sin a}{x-a}$ g) $\lim\limits_{x\to \infty} (\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x-1})$ h) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{\arccos x}{\sqrt{1-x}}$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2}$ j) $\lim\limits_{x\to \infty} \log(1+2^x)\cdot\log\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\sin x)}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\cos x)^x - \sqrt{1+\sin^3 x}}{x^3}$

m) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ n) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\dfrac{\pi}{2} - \arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ o) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\arccos\frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sin x}$

Věta (Heineova věta)**.** Nechť $c \in \mathbb{R}^*$, $A \in \mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu c. Pak jsou následující dva výroky ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x\to c} f(x) = A$.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n \in D_f$, $x_n \neq c$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

5. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na FSV):

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{(1+\cos x)^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log(1+x^3+3^x+x^x)}{\log(1+x^3+3^x)\log(1+x^3)}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x\cdot\log(\sin^2 x)}{\sqrt{1+\sin x}}$

d) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n+n^{n+1}+\ldots+n^{2n}}\left(1-\cos\tfrac{3}{n}\right)$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos x\cdot\log(\cos x)}-\sqrt{1+\log(\cos x)}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x}-\sqrt[3]{\sin x}}\cdot\frac{\sqrt[3]{x}}{\sin^2 x}$

f) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+\sin n}-\sqrt{n^3+3n}}{\sqrt[4]{n^2+n}-\sqrt[4]{n^2+\operatorname{arctg} n}}$ g) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x}{2}\right)^{\operatorname{tg}^2 2x}$

6. Spočtěte následující limity posloupností, nebo ukažte že limita neexistuje (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na MFF):

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^{120}-(1+\frac{2}{n})^{80}}{(1-\frac{1}{n})^{100}+(1+\frac{3}{n})^{100}-2}$ b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n^2+n+1)-\log(n^2+n)}{\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}}$

7. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na MFF):

a) $\sum_{n=1}^\infty \arcsin(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-1})\sqrt{\sin(\frac{1}{n})}$ b) $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{arctg}(\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}})\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{(\sin(\frac{1}{n}))^{\frac{10}{3}}}$

c) $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{\log n}\operatorname{arctg}((-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}})$ d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}$ e) $\sum_{n=1}^\infty \cos(\pi n)\arccos(\log(e-\frac{1}{n}))$ (zde AK nevyšetřujte)

8. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na MFF):

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\cos(\sin x)-1}{\log(\sqrt{1+x^2})}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1^x+2^x+3^x}{3}\right)^{1/x}$ c) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{\arccos(e^{-x})}{\sqrt{x}}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin 2x}-e^{\arcsin x}}{\operatorname{tg} x}$

VII. SPOJITOSTI A DERIVACE

1. Vyšetřete spojitost a najděte derivaci funkce $f(x) =$

Ze zkouškových písemek na FSV: a) $\max\{5x-4, x^2\}$ b) $[x] \cdot \sqrt[3]{x^2-9}$ c) $|\cos 2x| \cdot (\operatorname{tg} x - 1)$

Ze zkouškových písemek na MFF: d) $f(x) = \begin{cases} x^2(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

e) $\cos x \cdot [\sin x]$ f) $(e + |x|)^x$

2. Vyšetřete spojitost (spočítejte limity v krajních bodech definičního oboru a pokud lze funkci spojitě dodefinovat, udělejte to a pracujte s dodefinovanou funkcí) a najděte derivaci funkce $f(x) =$

a) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ b) $(\sin x)^{\cos x}$ c) $\log \arccos x$ d) $x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$ e) $\operatorname{arctg} e^x - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$

VIII. APLIKACE DERIVACÍ

1. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2, \quad x \in [-3, 2]$

2. Nalezněte extrémy (lokální i globální) funkcí

a) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ b) $g(x) = |x|e^{-|x-1|}, \quad x \in \mathbb{R}$

3. Dokažte následující nerovnosti: a) $\forall x > 0 : x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ b) $\forall x > 0 : x^e \leq e^x$

4. Dokažte, že $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

5. Vyšetřete průběh funkce $f(x) =$

Ze zkouškových písemek na FSV: a) $\left(3^{x+2|x|} - 9\right)^2$ b) $\operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^2-6}$ c) $(x + \log 2) \cdot 2^{-\frac{5}{x}}$

Ze zkouškových písemek na MFF: d) $\frac{x^3}{\sqrt{|x^4-1|}}$ e) $|(1-x^2)e^{-x}|$