1. Komplexní funkce

1.1. Komplexní čísla, elementární funkce

Definice. *Množinou komplexních čísel* rozumíme množinu $\mathbb{R}^2$ s následujícími operacemi:

- sčítání a násobení reálným číslem (definovanými stejně jako v $\mathbb{R}^2$)
- násobení definované vzorcem

$$(x, y) \cdot (a, b) := (xa - by, ab + ya), \quad (x, y), (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Množinu komplexních čísel značíme $\mathbb{C}$, prvek $(x, y) \in \mathbb{C}$ zapisujeme také jako $x + iy$, pokud $x = 0$ (resp. $y = 0$) pak používáme značení $(0, y) = iy$ (resp. $(x, 0) = x$). Máme tedy $i^2 = -1$ a číslo i nazýváme *imaginární jednotkou.*

Poznámka. Množinu $\mathbb{R}$ přirozeně ztotožnujeme s podmnožinou $\mathbb{C}$ pomocí zobrazení $\mathbb{R} \ni x \mapsto (x, 0) \in \mathbb{C}$.

Definice. Nechť $z = (x, y) = x + iy \in \mathbb{C}$. Pak definujeme

- $\operatorname{Re} z = x$ (*reálná část čísla* z),
- $\operatorname{Im} z = y$ (*komplexní část čísla* z),
- $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (*absolutní hodnota čísla* z),
- $\overline{z} = x - iy$ (*komplexně sdružené číslo k číslu* z).

Tvrzení 1.1 (Základní vlastnosti komplexních čísel). *Pro každé $z, w \in \mathbb{C}$ platí:*

(i) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$, $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,

(ii) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$, $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, $|z| = |\overline{z}|$,

(iii) $|\operatorname{Re} z| \leqslant |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leqslant |z|$, $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$ *(pokud $z \neq 0$)*

Definice. Funkci $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definujeme předpisem

$$\exp(x + iy) := \begin{cases} \exp(x)(\cos(y) + i \sin(y)) & (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Funkci $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definujeme předpisem $\sin(z) := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$, $z \in \mathbb{C}$.
Funkci $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definujeme předpisem $\cos(z) := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$, $z \in \mathbb{C}$.

Poznámka. Pokud ztotožnujeme $\mathbb{R}$ s podmnožinou $\mathbb{C}$, pak $\exp|_{\mathbb{R}}$, $\sin|_{\mathbb{R}}$ a $\cos|_{\mathbb{R}}$ jsou shodné s reálnými funkcemi exp, sin a cos, které jsme definovali v rámci předmětu Kalkulus 1.

Tvrzení 1.2 (Základní vlastnosti elementárních funkcí). *Ať $z, w \in \mathbb{C}$. Platí:*

(i) $\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w)$*;*

(ii) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$, $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$, $\exp(-z) = \frac{1}{e^z}$*;*

(iii) $\exp(z) = \exp(w)$ *právě když $z - w$ je celočíselný násobek $2\pi i$;*

(iv) $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \backslash \{0\}$*;*

(v) $\sin(z + w) = \sin(z) \cos(w) + \cos(z) \sin(w)$, $\cos(z + w) = \cos(z) \cos(w) - \sin(z) \sin(w)$*;*

(vi) $\cos(z + \pi) = -\cos(z)$, $\sin(z + \pi) = -\sin(z)$*;*

(vii) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$, $\overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z})$, $\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z})$*;*

(viii) *Funkce* $\sin$ *je lichá, funkce* $\cos$ *je sudá, funkce* $\sin$ *a* $\cos$ *jsou* 2π*-periodické;*

(ix) $\sin(z) = 0$ *právě když* z *je celočíselný násobek* π, $\cos(z) = 0$ *právě když* $z \in \{\pi/2 + k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$*;*

(x) $\sin(\mathbb{C}) = \mathbb{C} = \cos(\mathbb{C})$.

Definice. Pro $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ definujeme *argument čísla* z jako

$$\operatorname{Arg}(z) := \{t \in \mathbb{R};\ z = |z|(\cos t + i \sin t)\}.$$

a *logaritmus čísla* z jako

$$\operatorname{Log}(z) := \{w \in \mathbb{C};\ \exp(w) = z\}.$$

Hlavní hodnotou argumentu čísla z je jediné reálné číslo $t \in \operatorname{Arg}(z)$, pro které platí $t \in (-\pi, \pi]$. Hlavní hodnotu argumentu čísla z značíme $\arg(z)$. *Hlavní hodnotou logaritmu čísla* z je jediné číslo $w \in \operatorname{Log}(z)$, pro které platí $\operatorname{Im} w \in (-\pi, \pi]$. Hlavní hodnotu logaritmu čísla z značíme $\log(z)$.

Poznámka. Pokud ztotožnujeme $\mathbb{R}$ s podmnožinou $\mathbb{C}$, pak $\log|_{(0,\infty)}$ je shodná s reálnou funkcí log, kterou jsme definovali v rámci předmětu Kalkulus 1.

Tvrzení 1.3 (Základní vlastnosti argumentu a logaritmu)**.** *Ať* $z, w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$*. Platí:*

(i) $\operatorname{Arg}(z) = \{\arg(z) + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\operatorname{Im} y;\ y \in \operatorname{Log}(z)\}$;

(ii) $\operatorname{Log}(z) = \{\log(z) + 2k\pi i;\ k \in \mathbb{Z}\} = \{\log(|z|) + it;\ t \in \operatorname{Arg}(z)\}$;

(iii) $\log(z) = \log(|z|) + i \arg(z)$;

(iv) $\arg(z) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}\right), & \textit{pokud } \operatorname{Re} z > 0, \\ \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right), & \textit{pokud } \operatorname{Im} z > 0, \\ -\arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right), & \textit{pokud } \operatorname{Im} z < 0; \end{cases}$

(v) *pokud* $z \in \mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$*, pak* $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$ *a* $\log(\overline{z}) = \overline{\log(z)}$*;*

(vi) $\log(zw) = \log(z) + \log(w) \pmod{2\pi i}$, $\quad \log(z/w) = \log(z) - \log(w) \pmod{2\pi i}$;

(vii) $\exp(\log z) = z$, $\quad \log(\exp(z)) = z \pmod{2\pi i}$.

Definice. Pro $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ a $a \in \mathbb{C}$ definujeme *a-tou mocninu čísla* z jako $M_a(z) := \{\exp(aw);\ w \in \operatorname{Log}(z)\}$. *Hlavní hodnotou a-té mocniny čísla* z rozumíme $z^a := \exp(a \log(z))$.

Tvrzení 1.4 (Základní vlastnosti obecné mocniny)**.** *Ať* $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$*. Pak:*

(i) *Je–li* $n \in \mathbb{Z}$*, pak obsahuje množina* $M_n(z)$ *právě jeden prvek, a to prvek* z^n*, kde*

$$z^0 = 1; \quad z^n = \underbrace{z \cdots z}_{n-\textit{krát}} \textit{ pro } n > 0; \quad z^n = \tfrac{1}{z^{-n}} \textit{ pro } n < 0;$$

(ii) *Pro* $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ *je* $w \in M_{1/n}(z)$ *právě tehdy, když* $w^n = z$*. Pokud je* $n > 1$*, pak*

$$M_{1/n}(z) = \Big\{ \sqrt[n]{|z|}\big(\cos(\tfrac{\arg(z)+2k\pi}{n}) + i \sin(\tfrac{\arg(z)+2k\pi}{n})\big);\ k = 0, \ldots, n-1 \Big\}.$$

1.2. Derivace komplexních funkcí

Definice. Nechť $n, m \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A$ a $f : A \to \mathbb{R}^m$ je funkce.

(i) Řekneme, že f *má v bodě a limitu b vzhledem k množině A*, jestliže

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in A\backslash\{a\} \colon \rho(x, a) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), b) < \varepsilon.$$

Limitu f v a vzhledem k A značíme $\lim_{x \to a,\, x \in A} f(x)$, případně $\lim_{x \to a} f(x)$ (je-li $A = \mathbb{R}^n$).

(ii) Řekneme, že f *je spojitá v bodě a*, pokud $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Poznámka. Pro $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ máme $\rho(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$ (tj. Euklidovská vzdálenost zděděná z $\mathbb{R}^2$ odpovídá absolutní hodnotě v $\mathbb{C}$).

Pokud budeme hovořit o otevřené kouli, otevřené/uzavřené množině, vnitřku množiny či o konvergenci v $\mathbb{C}$, máme na mysli odpovídající pojmy z $\mathbb{R}^2$. Analogicky také rozumíme limitě a spojitosti zobrazení z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{C}$, z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{R}$, a z $\mathbb{C}$ do $\mathbb{C}$.

Tvrzení 1.5 (Spojitost elementárních funkcí)**.** *Funkce* $z \mapsto |z|$, $z \mapsto \operatorname{Re} z$, $z \mapsto \operatorname{Im} z$, $z \mapsto \overline{z}$, $\exp$, $\sin$ *a* $\cos$ *jsou spojité. Funkce* $\arg$ *a* $\log$ *jsou spojité na* $\mathbb{C}\backslash(-\infty, 0]$.

Definice. (i) *Komplexní funkcí reálné proměnné* rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{R}$.

(ii) Pokud f je komplexní funkce reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$, pak *derivací funkce f v bodě x* rozumíme číslo

$$f'(x) := \lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x},$$

pokud tato limita existuje (v $\mathbb{C}$).

(iii) Funkce $F : (a, b) \to \mathbb{C}$ je *primitivní funkce k f na (a, b)*, pokud $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$.

(iv) Pokud f je komplexní funkce reálné proměnné, pak *integrál (Riemannův, Newtonův, Lebesgueův) z funkce f od a do b* definujeme jako číslo

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f,$$

pokud oba integrály na pravé straně konvergují.

Fakt 1.6. *Je–li* $(a, b) \subset \mathbb{R}$ *a* $f : (a, b) \to \mathbb{C}$ *funkce taková, že* $\int_a^b |\operatorname{Re} f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$ *a* $\int_a^b |\operatorname{Im} f(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$*, pak*

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Tvrzení 1.7 (Základní vlastnosti komplexních funkcí reálné proměnné)**.** *Ať* f *je komplexní funkce reálné proměnné,* $a \in \mathbb{R}$ *a* $z \in \mathbb{C}$*. Pak platí*

(i) $\lim_{x \to a^+} f(x) = z$*, právě když*

$$\lim_{x \to a^+} \operatorname{Re} f(x) = \operatorname{Re} z \text{ a } \lim_{x \to a^+} \operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im} z.$$

Podobně pro limity zleva a oboustranné.

(ii) f *je spojitá (zleva, zprava) v bodě* a*, právě když obě funkce* $\operatorname{Re} f$ *a* $\operatorname{Im} f$ *jsou spojité (zleva, zprava) v bodě* a.

(iii) $f'(x)$ *existuje, právě když existují vlastní derivace* $(\operatorname{Re} f)'(x)$ *a* $(\operatorname{Im} f)'(x)$*. Pak* $f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x)$.

(iv) Funkce $F : (a, b) \to \mathbb{C}$ *je primitivní funkce k* f *na* (a, b)*, právě když* $\operatorname{Re} F$ *je primitivní funkce k* $\operatorname{Re} f$ *na* (a, b) *a* $\operatorname{Im} F$ *je primitivní funkce k* $\operatorname{Im} f$ *na* (a, b)

Definice. (i) *Komplexní funkcí komplexní proměnné* rozumíme zobrazení $f : M \to \mathbb{C}$, kde $M \subset \mathbb{C}$.

(ii) Pokud f je komplexní funkce komplexní proměnné a $a \in \mathbb{C}$, pak *derivací funkce f v bodě a* rozumíme komplexní číslo

$$f'(a) := \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a},$$

pokud tato limita existuje (v $\mathbb{C}$).

Poznámka. Pro derivaci podle komplexní proměnné platí věty o derivaci součtu, součinu, podílu a složené funkce ve stejné podobě jako pro derivaci v $\mathbb{R}$. Má-li f v bodě $a \in \mathbb{C}$ derivaci podle komplexní proměnné, je v bodě a spojitá. Je-li f komplexní funkcí komplexní proměnné, g komplexní funkce reálné proměnné a $x \in \mathbb{R}$, pak

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

pokud obě derivace na pravé straně existují.

Věta 1.8 (Cauchy-Riemannovy podmínky). *Ať f je komplexní funkcí komplexní proměnné. Označme $\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$ funkci dvou reálných proměnných s hodnotami v $\mathbb{R}^2$ odpovídající ztotožnění $\mathbb{C}$ a $\mathbb{R}^2$, tj. takovou že*

$$f(a + ib) = \tilde{f}_1(a, b) + i\tilde{f}_2(a, b), \quad (a, b) \in D(f).$$

Nechť $z = a + ib$, kde $a, b \in \mathbb{R}$.

(i) Pokud $f'(z)$ existuje, pak existují obě parciální derivace funkcí $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ v bodě (a, b) a platí Cauchy-Riemannovy podmínky

$$\frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial y}(a, b) \quad \text{a} \quad \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial y}(a, b) = -\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a, b). \tag{1.1}$$

Navíc, $f'(z) = \frac{\partial \tilde{f}_1}{\partial x}(a, b) + i\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial x}(a, b)$.

(ii) Pokud mají obě funkce $\tilde{f}_1$, $\tilde{f}_2$ v bodě (a, b) spojité parciální derivace a platí Cauchy-Riemannovy podmínky (1.1), *pak $f'(z)$ existuje.*

Definice. Ať $M \subset \mathbb{C}$. Řekneme, že funkce f je *holomorfní na množině M*, pokud existuje otevřená množina $G \supset M$ taková, že f má derivaci (podle komplexní proměnné) v každém bodě množiny G. Funkce holomorfní na $\mathbb{C}$ se nazývá *celá funkce*.

Tvrzení 1.9 (Derivace elementárních funkcí). *(i) Pokud $f(z) = 1$, $z \in \mathbb{C}$ pak $f'(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$.*

(ii) Pokud $n \in \mathbb{N}$ a $f(z) = z^n$, $z \in \mathbb{C}$, pak $f'(z) = nz^{n-1}$, $z \in \mathbb{C}$.

(iii) Pro $z \in \mathbb{C}$ platí $\exp'(z) = \exp(z)$, $\sin'(z) = \cos(z)$, $\cos'(z) = -\sin(z)$.

(iv) Pro $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ platí $\log'(z) = \frac{1}{z}$.

(v) Pokud $a \in \mathbb{C}$ a $f(z) = z^a$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, pak $f'(z) = az^{a-1}$, $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.

1.3. Primitivní funkce a křivkový integrál komplexní funkce

Definice. *Křivkou v $\mathbb{C}$* rozumíme spojitou funkci $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, kde $a < b$ jsou reálná čísla. Je–li $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ křivka, pak

- $\varphi(a)$ je *počáteční bod křivky* φ, $\varphi(a)$ je *koncový bod křivky* φ;
- $[\varphi] := \{\varphi(t);\ t \in [a, b]\}$ je *obraz křivky* φ;
- pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$, říkáme že křivka φ je *uzavřená*;
- Pokud $A \subset \mathbb{C}$ je množina splňující $[\varphi] \subset A$, řekneme že φ je křivka v A.
- opačnou křivkou k φ rozumíme křivku $\dot{-}\varphi : [-b, -a] \to \mathbb{C}$ definovanou vzorcem $\dot{-}\varphi(t) := \varphi(-t)$, $t \in [-b, -a]$.
- je–li navíc $\psi : [c, d] \to \mathbb{C}$ křivka, pro kterou $\psi(c) = \varphi(b)$, pak *spojením* φ a ψ rozumíme křivku $\varphi \dot{+} \psi : [a, b + d - c] \to \mathbb{C}$ definovanou vzorcem

$$(\varphi \dot{+} \psi)(t) := \begin{cases} \varphi(t), & t \in [a, b] \\ \psi(t - b + c), & t \in [b, b + d - c]; \end{cases}$$

- *Délkou křivky* φ rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{\sum_{j=1}^{k} |\varphi(x_{j-1}) - \varphi(x_j)|;\ n \in \mathbb{N}, a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}.$$

Křivku $\varphi_{a,r,\circlearrowleft}(t) := a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$, nazýváme *kladně orientovaná kružnice o středu a a poloměru r*. Opačnou křivku nazýváme *záporně orientovaná kružnice*.
Křivku $\varphi(t) = a + t(b - a)$, $t \in [0, 1]$, kde $a, b \in \mathbb{C}$, nazýváme *orientovaná úsečka* $[a, b]$.
Cestou v $\mathbb{C}$ rozumíme křivku $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$, pro kterou existují body $a = p_0 < p_1 < \ldots < p_n = b$ takové, že $\varphi \in \mathcal{C}^1([p_{i-1}, p_i])$ (tj. pro každé $i = 1, \ldots, n$ derivace funkce φ je spojitá funkce na (p_{i-1}, p_i) a má v krajních bodech vlastní jednostranné limity).

Poznámka. Pozorný student si může vzpomenout na pojem křivky a její délky probíraný v rámci předmětu Kalkulus 2. Je–li $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ cesta, pak $L(\varphi) = \int_a^b |\varphi'(t)| \, \mathrm{d}t$.

Definice. Je–li $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ cesta a $f : [\varphi] \to \mathbb{C}$ spojitá funkce, pak definujeme *integrál funkce f podél cesty φ* jako

$$\int_\varphi f = \int_\varphi f(z) \, \mathrm{d}z := \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) \, \mathrm{d}t,$$

kde integrál na pravé straně je Lebesgueův.

Tvrzení 1.10 (Základní vlastnosti křivkového integrálu)**.** *Ať $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ je cesta a $f : [\varphi] \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak*

(i) $\int_{\dot{-}\varphi} f = -\int_\varphi f$;

(ii) pokud je $\psi : [c, d] \to \mathbb{C}$ cesta splňující $\psi(c) = \varphi(b)$ a $f : [\varphi] \cup [\psi] \to \mathbb{C}$ spojitá funkce, pak $\int_{\varphi \dot{+} \psi} f = \int_\varphi f + \int_\psi f$;

(iii) $\left|\int_\varphi f\right| \leqslant L(\varphi) \cdot \max\{|f(z)|;\ z \in [\varphi]\}$.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{C}$ je funkce. Funkce F se nazývá *primitivní k funkci f na G*, jestliže pro každé $z \in G$ platí $F'(z) = f(z)$.

Věta 1.11 (První základní věta kalkulu v komplexním případě)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, $f : G \to \mathbb{C}$ je funkce a F je primitivní k funkci f na G. Pak pro každou cestu $\varphi : [a, b] \to G$ platí*

$$\int_\varphi f = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Speciálně, je–li φ uzavřená cesta, pak $\int_\varphi f = 0$.

Definice. Řekneme, že neprázdná množina $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$ je *souvislá*, pokud není sjednocením dvou disjunktních neprázdných otevřených množin. Řekneme, že A je *oblast*, pokud A je otevřená a souvislá. Analogicky definujeme souvislé podmnožiny a oblasti v $\mathbb{C}$.

Tvrzení 1.12 (Charakterizace oblastí v $\mathbb{C}$)**.** *Ať $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) G je souvislá;

(ii) pro každé dva body $z, w \in G$ existuje spojité zobrazení $\varphi : [0, 1] \to G$, že $\varphi(0) = z$ a $\varphi(1) = w$;

(iii) každé dva body v G lze spojit lomenou čárou (tj. pro každé dva body $z, w \in G$ existuje taková konečná posloupnost bodů $z = x_0, x_1, \ldots, x_n = w$, že pro každé $i = 1, \ldots, n$ leží úsečka spojující body x_{i-1} a x_i celá v G).

Důsledek 1.13. *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f : G \to \mathbb{C}$ funkce. Je–li F primitivní k funkci f na G, je každá jiná primitivní funkce k f na G tvaru $F + k$, kde k je konstanta. Má–li f na G nulovou derivaci, pak je na této množině konstantní.*

Věta 1.14 (Druhá základní věta kalkulu v komplexním případě)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní:*

(i) f má v G primitivní funkci;

(ii) křivkový integrál funkce f nezávisí na cestě v G (tj. kdykoliv φ a ψ jsou cesty s hodnotami v G se stejným počátečním a koncovým bodem, pak $\int_\varphi f = \int_\psi f$);

(iii) pro každou uzavřenou cestu φ v G je $\int_\varphi f = 0$.;

(iv) pro každou uzavřenou lomenou čáru φ v G je $\int_\varphi f = 0$.

Navíc, pokud f má v G primitivní funkci, pak primitivní funkci lze popsat následujícím způsobem: zvolme libovolný bod $z_0 \in G$, pro $z \in G$ položme $F(z) := \int_{\varphi_z} f$, kde φ_z je libovolná křivka v G s počátečním bodem z_0 a koncovým bodem z. Takto definovaná funkce F je primitivní funkcí k funkci f na G.

1.4. Cauchyova věta a její první důsledky

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $\varphi_0 : [a,b] \to G$, $\varphi_1 : [a,b] \to G$ jsou dvě uzavřené křivky v G. Řekneme, že φ_0 a φ_1 jsou *homotopické jakožto uzavřené křivky v* G, pokud existuje spojité zobrazení $\gamma : [0,1] \times [a,b] \to G$ splňující náseldující dvě podmínky

- $\gamma(0,t) = \varphi_0(t)$ a $\gamma(1,t) = \varphi_1(t)$ pro $t \in [a,b]$;
- $\gamma(s,a) = \gamma(s,b)$ pro $s \in [0,1]$.

Věta 1.15 (Cauchyova věta). *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina a $f : G \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce. Pokud φ_0 a φ_1 jsou dvě uzavřené cesty v G, které jsou homotopické jakožto uzavřené křivky v G, pak*

$$\int_{\varphi_0} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_1} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Věta 1.16 (Cauchyův vzorec pro kruh). *Nechť f je holomorfní na uzavřeném kruhu o středu $a \in \mathbb{C}$ a poloměru $r > 0$ (tj. na množině $\overline{B(a,r)} := \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| \leqslant r\}$). Pak pro každé $z \in B(a,r)$ platí*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{a,r,\circlearrowleft}} \frac{f(w)}{w-z}\,\mathrm{d}w.$$

Důsledek 1.17 (Vlastnost průměru pro holomorfní funkce). *Nechť f je holomorfní na $\overline{B(a,r)}$ (kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$). Pak platí*

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\,\mathrm{d}t.$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Řekneme, že uzavřená křivka $\varphi : [a,b] \to G$ v G je *stažitelná v G do bodu*, pokud existuje takový bod $z_0 \in G$, že φ a z_0 jsou homotopické jakožto uzavřené křivky v G (kde bod z_0 chápeme jako uzavřenou křivku definovanou předpisem $[a,b] \ni t \mapsto z_0$). Pokud je G souvislá a každá uzavřená křivka v G je stažitelná v G do bodu, pak říkáme, že G je *jednoduše souvislá*.

Definice. Množina $M \subset \mathbb{C}$ se nazývá *hvězdovitá*, pokud existuje takové $a \in M$, že pro každé $b \in M$ je úsečka spojující body a, b celá obsažena v M.

Tvrzení 1.18. *Otevřená hvězdovitá množina je jednoduše souvislá.*

Věta 1.19 (Cauchyova věta v jednoduše souvislé oblasti). *Nechť f je holomorfní na jednoduše souvislé oblasti $G \subset \mathbb{C}$. Pak pro každou uzavřenou cestu φ v G je $\int_\varphi f = 0$.*

1.5. Vyjádření holomorfní funkce mocninnou řadou a další důsledky Cauchyovy věty

V $\mathbb{C}$ máme analogické definice a výsledky o řadách, posloupnostech a řadách funkcí a o mocninných řadách jako v $\mathbb{R}$. V následujícím budeme potřebovat zejména tyto.

Definice. Nechť E je množina, $f : E \to \mathbb{C}$ je funkce a pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : E \to \mathbb{C}$ funkce. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ *konverguje stejnoměrně na E* k funkci f, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\ \forall n \geqslant k : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$.

Tvrzení 1.20. *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ je posloupnost komplexních spojitých integrovatelných funkcí definovaných na neprázdném omezeném intervalu $(a,b) \subset \mathbb{R}$, která stejnoměrně konverguje k funkci f na (a,b). Pak $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Definice. Nechť $\{a_n\}$ je posloupnost komplexních čísel. Pro $m \in \mathbb{N}$ položme

$$s_m = a_1 + a_2 + \cdots + a_m.$$

Číslo s_m nazýváme *m-tým částečným součtem* řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$, přičemž číslo a_n je *n-tým členem* řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$. *Součet* nekonečné řady $\sum_{n=1}^\infty a_n$ je limita posloupnosti $\{s_m\}$, pokud tato limita existuje. Součet řady budeme značit symbolem $\sum_{n=1}^\infty a_n$. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ je *konvergentní*, existuje-li její součet. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^\infty a_n$ je *absolutně konvergentní*, jestliže je řada $\sum_{n=1}^\infty |a_n|$ konvergentní.

Tvrzení 1.21. *Je-li řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutně konvergentní, pak je i konvergentní.*

Fakt 1.22. *Pokud je* $|q| < 1$, *pak* $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$.

Definice. *Mocninnou řadou o středu* $a \in \mathbb{C}$ rozumíme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n,$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $z \in \mathbb{C}$.

Věta 1.23 (o poloměru konvergence mocninné řady)**.** *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ *je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek* $\varrho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *takový, že*

- *pro každé* $z \in \mathbb{C}$, $|z-a| < \varrho$, *je uvedená řada absolutně konvergentní,*
- *pro každé* $z \in \mathbb{C}$, $|z-a| > \varrho$, *je uvedená řada divergentní.*

Prvek ϱ *splňuje*

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde výrazem $\frac{1}{0}$ *rozumíme* ∞ *a výrazem* $\frac{1}{\infty}$ *rozumíme* 0. *Prvek* ϱ *nazýváme* poloměrem konvergence *uvedené řady.*

Věta 1.24 (derivace a integrace mocninné řady)**.** *Nechť* ϱ *je poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$. *Potom poloměr konvergence řad* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$ *je také roven* ϱ. *Pro* $z \in \mathbb{C}$ *splňující* $|z-a| < \varrho$ *označme* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$. *Potom*

(i) funkce f *má v každém takovém bodě derivaci a platí* $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z-a)^{n-1}$;

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (z-a)^{n+1}$ *je primitivní funkce k* f *na* $B(a,\varrho)$.

Speciálně, f *má derivace všech řádů na* $B(a,\rho)$ *a dostáváme následující vzorec pro výpočet n-té derivace funkce* f *v bodě* a: $f^{(n)}(a) = n! a_n$, $n \geqslant 0$.

Dále již následují výsledky, které jsou specifické pro $\mathbb{C}$ a nemají svou analogii v $\mathbb{R}$.

Věta 1.25 (Holomorfní funkce je součtem mocninné řady)**.** *Nechť* f *je holomorfní funkce na* $B(a,r)$, *kde* $a \in \mathbb{C}$ *a* $r > 0$. *Pak existují jednoznačně určená čísla* a_n, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *taková, že*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad z \in B(a,r).$$

Pokud je funkce f *holomorfní dokonce na* $\overline{B(a,r)}$, *pak pro koeficienty této řady platí*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{a,r,\circlearrowleft}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, \mathrm{d}w, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Důsledek 1.26. *Je–li* f *holomorfní na množině* $M \subset \mathbb{C}$, *je i* f' *holomorfní na* M.

Důsledek 1.27. *Je–li* G *jednoduše souvislá oblast, pak funkce* $f : G \to \mathbb{C}$ *má v* G *primitivní funkci, právě když je holomorfní na* G.

Věta 1.28 (Cauchyovy odhady)**.** *Nechť* f *je holomorfní na* $\overline{B(a,r)}$ *(kde* $a \in \mathbb{C}$ *a* $r > 0$*). Pak pro* $n \in \mathbb{N}$ *máme*

$$|f^{(n)}(a)| \leqslant \frac{n!}{r^n} \max\{|f(z)|;\ |z-a| = r\}.$$

Věta 1.29 (Liouvilleova věta)**.** *Omezená celá funkce je konstantní.*

Věta 1.30 (Základní věta algebry)**.** *Každý polynom stupně alespoň* 1 *s komplexními koeficienty má alespoň jeden kořen v* $\mathbb{C}$.

Věta 1.31 (Rozklad na kořenové činitele)**.** *Nechť* $P(z) = a_n z^n + \ldots + a_0$ *je polynom s komplexními koeficienty, pričemž* $n \geqslant 1$ *a* $a_n \neq 0$. *Pak existují komplexní čísla* $z_1, \ldots, z_n$ *taková, že*

$$P(z) = a_n (z-z_n) \ldots (z-z_2)(z-z_1), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Věta 1.32 (o kořenech holomorfní funkce)**.** *Nechť f je holomorfní funkce na $B(a,r)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Předpokládejme, že $f(a) = 0$ a není konstantní nulová funkce na $B(a,r)$. Pak existuje právě jedno $p \in \mathbb{N}$ a funkce g holomorfní na $B(a,r)$ splňující $g(a) \neq 0$ a*

$$f(z) = (z-a)^p g(z), \quad z \in B(a,r).$$

Definice. Je–li f, a a p jako ve Větě 1.32, pak řekneme že bod a je *p-násobný kořen funkce f*.

Tvrzení 1.33. *Nechť f je holomorfní funkce na $B(a,r)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r > 0$. Pak a je p-násobný kořen funkce f, právě když pro každé $n \in \{0, \ldots, p-1\}$ máme $f^{(n)}(a) = 0$, ale $f^{(p)}(a) \neq 0$.*

Definice. Nechť φ je uzavřená cesta a $a \in \mathbb{C} \backslash [\varphi]$. Pak *index bodu a vzhledem ke křivce φ* je definován vzorcem

$$\operatorname{ind}_\varphi a := \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z-a} \, \mathrm{d}z.$$

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{C}$. Množinu $A \subset M$ nazveme komponentou množiny M, je-li maximální souvislou podmnožinou M.

Lemma 1.34. *Nechť φ uzavřená cesta. Položme $\iota(a) := \operatorname{ind}_\varphi a$, $a \in \mathbb{C} \backslash [\varphi]$.*

- *Funkce ι nabývá jen celočíselných hodnot*
- *Funkce ι je konstantní na každé komponentě $\mathbb{C} \backslash [\varphi]$.*
- *Funkce ι je rovna nule na neomezené komponentě $\mathbb{C} \backslash [\varphi]$.*

Poznámka.

- Platí **Jordanova věta**: Je–li $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ uzavřená křivka taková, že φ je prostá na $[a,b)$, pak existuje $\sigma \in \{-1, 1\}$ takové, že komplexní rovina $\mathbb{C}$ je rozdělena na obraz křivky $[\varphi]$, *vnitřní oblast* $\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{ind}_\varphi z = \sigma\}$ a *vnější oblast* $\{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{ind}_\varphi z = 0\}$. Navíc, vnitřní oblast je omezená oblast, vnější oblast je neomezená oblast. Konečně, pokud otevřená množina U obsahuje $[\varphi]$ a její vnitřní oblast, pak φ je stažitelná v U do bodu.
- Platí **propichovací věta**: Nechť φ je uzavřená cesta, $a, b \in \mathbb{C}$ taková, že $b - a > 0$, úsečka spojující body a, b protíná $[\varphi]$ v jediném bodě z_0, ten je různý od a, b, existuje jediné t_0, pro které $\varphi(t_0) = z_0$, a $\operatorname{Im} \varphi'(t_0) \neq 0$. Pak

$$\operatorname{ind}_\varphi a - \operatorname{ind}_\varphi b = \operatorname{sgn} \operatorname{Im} \varphi'(t_0).$$

Věta 1.35 (Cauchyův vzorec)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina, $f : G \to \mathbb{C}$ holomorfní funkce a φ uzavřená cesta v G stažitelná v G do bodu. Pak*

$$f(z) \operatorname{ind}_\varphi z = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(w)}{w-z} \, \mathrm{d}w, \quad z \in G \backslash [\varphi].$$

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{C}$ je množina a $z_0 \in \mathbb{C}$. Říkáme, že bod z_0 je *hromadným bodem množiny* M, pokud pro každé $r > 0$ obsahuje otevřená koule $B(z_0, r)$ nějaký bod množiny M různý od z_0.

Věta 1.36 (o jednoznačnosti)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je oblast a funkce f, g jsou holomorfní na G. Pokud množina $\{z \in G;\ f(z) = g(z)\}$ má hromadný bod v G, pak $f = g$ na G*

Důsledek 1.37. *Jsou–li dvě celé funkce f, g shodné na $\mathbb{R}$, pak $f = g$ na $\mathbb{C}$.*

Věta 1.38 (Princip maxima pro holomorfní funkce)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je omezená oblast a $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ je spojitá na $\overline{G}$ a holomorfní na G. Pak $|f|$ nabývá svého maxima na množině $\overline{G} \backslash G$. Navíc, pokud je f nekonstantní, pak pro $w \in G$ je $|f(w)| < \max\{|f(z)|;\ z \in \overline{G}\}$.*

Věta 1.39 (Morerova věta)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená a $f : G \to \mathbb{C}$ je spojitá funkce. Pokud pro každou uzavřenou lomenou čáru φ v G je $\int_\varphi f = 0$, pak f je holomorfní na G.*

Věta 1.40 (Weierstrassova věta)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je otevřená, funkce f_n jsou holomorfní v G konvergují stejnoměrně na G k funkci f. Pak f je holomorfní v G a $f'(z) = \lim_{n \to \infty} f_n'(z)$.*

1.6. Laurentovy řady a izolované singularity

Definice. *Laurentovou řadou o středu* $a \in \mathbb{C}$ rozumíme symbol

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n, \tag{*}$$

kde $a_n \in \mathbb{C}$ pro každé $n \in \mathbb{Z}$. *Regulární částí* řady (*) rozumíme mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n$. *Hlavní částí* řady (*) rozumíme symbol

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n. \tag{**}$$

Říkáme, že *hlavní část konverguje (v bodě z, absolutně, stejnoměrně na množině M)*, pokud příslušnou vlastnost má řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-a)^{-n}$. Součet této řady nazveme *součtem hlavní části řady* (*) a značíme jej rovněž (**).
Říkáme, že *řada (*) konverguje (v bodě z, absolutně, stejnoměrně na množině M)*, pokud příslušnou vlastnost má hlavní i regulární část. *Součtem řady* (*) rozumíme součet součtu regulární části a součtu hlavní části, tj.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n.$$

Definice. Nechť $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$ a $a \in \mathbb{C}$. Pak *mezikruží o středu a, vnitřním poloměru r a vnějším poloměru R* je množina

$$P(a,r,R) := \{z \in \mathbb{C};\ r < |z-a| < R\}.$$

Tvrzení 1.41. *Mějme Laurantovu řadu (*). Pak existují $r, R \in [0,\infty]$, pro která platí*

- *Regulární část řady (*) absolutně konverguje pro $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z-a| < R$ a diverguje pro $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z-a| > R$;*
- *Hlavní část řady (*) absolutně konverguje pro $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z-a| > r$ a diverguje pro $z \in \mathbb{C}$ splňující $|z-a| < r$.*

Je–li $r < R$, pak řada (*) absolutně konverguje na mezikruží $P(a,r,R)$. Navíc, součet řady je na tomto mezikruží holomorfní a derivace součtu Laurentovy řady se získá derivací řady člen po členu. Toto mezikruží nazýváme mezikruží konvergence řady (*).

Věta 1.42. *Nechť f je holomorfní funkce v mezikruží $P(a,r,R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $r < R$. Pak f je v $P(a,r,R)$ součtem Laurentovy řady $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$, která na $P(a,r,R)$ konverguje. Její koeficienty jsou určeny jednoznačně a pro každé $\rho \in (r,R)$ platí*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi_{a,\rho,\circlearrowleft}} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}w, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Definice. Nechť f je holomorfní funkce v mezikruží $P(a,0,R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $0 < R$. Nechť $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ je Laurentova řada funkce f v $P(a,0,R)$. Pak řekneme, že

- *f má v bodě a odstranitelnou singularitu*, pokud $a_n = 0$ pro každé $n < 0$;
- *f má v bodě a pól násobnosti p*, pokud $a_{-p} \neq 0$ a $a_n = 0$ pro každé $n < -p$;
- *f má v bodě a podstatnou singularitu*, pokud $a_n \neq 0$ pro nekonečně mnoho $n < 0$.

Definice. Označme $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Pro $\varepsilon > 0$ položme

$$B(\infty,\varepsilon) := \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C};\ |z| > \tfrac{1}{\varepsilon}\}.$$

Nechť f je funkce definovaná na podmnožině $\overline{\mathbb{C}}$ s hodnotami v $\overline{\mathbb{C}}$. Řekneme, že *funkce f má v bodě $a \in \overline{\mathbb{C}}$ limitu $A \in \overline{\mathbb{C}}$*, pokud pro každé $\varepsilon > 0$ existuje takové $\delta > 0$, že pro každé $z \in B(a,\delta)\backslash\{a\}$ platí $f(z) \in B(A,\varepsilon)$. Na $\overline{\mathbb{C}}$ rozšíříme operace následovně:

$$\begin{aligned}
\forall z \in \mathbb{C}: &\qquad z+\infty = \infty+z = z-\infty = \infty-z = \infty,\\
\forall z \in \overline{\mathbb{C}}\backslash\{0\}: &\qquad z\cdot\infty = \infty\cdot z = \frac{z}{0} = \infty,\\
\forall z \in \mathbb{C}: &\qquad \frac{\infty}{z} = \infty \quad \text{a} \quad \frac{z}{\infty} = 0.
\end{aligned}$$

Nedefinované jsou výrazy $\infty+\infty$, $\infty-\infty$, $0\cdot\infty$, $\infty\cdot 0$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$.

Poznámka. Operace jsou rozšířeny tak, aby platila věta o aritmetice limit s dodatkem „má–li pravá strana smysl".

Definice. Nechť f je funkce definovaná na $B(\infty, R)$ pro nějaké $R > 0$. Řekneme, že f je *holomorfní v bodě* ∞ (resp. *f má v bodě ∞ kořen násobnosti p*), pokud má tuto vlastnost funkce $g(z) = f(\frac{1}{z})$ v bodě 0. Je–li f holomorfní na $B(\infty, R)$ pro nějaké $R > 0$, pak říkáme že *f má v bodě ∞ odstranitelnou singularitu (pól násobnosti p, podstatnou singularitu)*, pokud má tuto vlastnost funkce $g(z) = f(\frac{1}{z})$ v bodě 0.

Věta 1.43 (Charakterizace singularit)**.** *Nechť f je holomorfní funkce v $P(a, 0, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $0 < R$. Pak platí:*

(i) f má v bodě a odstranitelnou singularitu, právě když $\lim_{z\to a} f(z) \in \mathbb{C}$. Dodefinujeme–li funkci f v bodě a hodnotou této limity, dostaneme funkci holomorfní v $B(a, R)$.

(ii) f má v bodě a pól násobnosti p, právě když $\lim_{z\to a}(z-a)^p f(z) \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Je–li $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ Laurentova řada funkce f v $P(a, 0, R)$ a f má v bodě a pól násobnosti p, pak funkce

$$B(a, R) \ni z \mapsto f(z) - \sum_{n=1}^{p} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

má v bodě a odstranitelnou singularitu. Navíc, $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$, právě když existuje p takové, že f má v bodě a pól násobnosti p.

(iii) f má v bodě a podstatnou singularitu, právě když $\lim_{z\to a} f(z)$ neexistuje.

Věta 1.44 (Velká Pickardova věta)**.** *Nechť f je holomorfní funkce v $P(a, 0, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $0 < R$. Má–li f v bodě a podstatnou singularitu, pak pro každé $r < R$ nabývá f v $P(a, 0, r)$ všech hodnot z $\mathbb{C}$ s výjimkou nejvýše jedné.*

Věta 1.45 (L'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť funkce f, g jsou holomorfní a nenulové v $B(a, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$. Pokud $f(a) = g(a) = 0$, pak existují obě následující limity a platí rovnost*

$$\lim_{z\to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z\to a} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

1.7. Rezidua

Definice. Nechť f je holomorfní funkce v $P(a, 0, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $0 < R$. Nechť $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-a)^n$ je Laurentova řada funkce f v $P(a, 0, R)$. Pak *reziduem funkce f v bodě a* rozumíme číslo $\operatorname{res}_a f := a_{-1}$.

Věta 1.46 (Reziduová věta)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{C}$ je jednoduše souvislá oblast a f je komplexní funkce holomorfní na $G\backslash M$, kde M je konečná množina. Pak pro každou uzavřenou cestu $\varphi : [a, b] \to G\backslash M$ platí*

$$\int_{\varphi} f = 2\pi i \sum_{a\in M} \operatorname{res}_a f \cdot \operatorname{ind}_{\varphi} a.$$

Tvrzení 1.47 (Některé metody výpočtu reziduí)**.** *Nechť f, g jsou funkce holomorfní v $P(a, 0, R)$, kde $a \in \mathbb{C}$ a $R > 0$.*

(i) Pro každé $\rho < R$ platí

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi_{a,\rho,\circlearrowleft}} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

(ii) Má–li funkce f v bodě a pól násobnosti p, pak

$$\operatorname{res}_a f = \frac{1}{(p-1)!} \lim_{z\to a} (f(z)(z-a)^p)^{(p-1)}.$$

(iii) Jsou–li f, g holomorfní v bodě a a g má v bodě a kořen násobnosti 1 (tj. $g(a) = 0$ a $g'(a) \neq 0$), pak

$$\operatorname{res}_a \frac{f}{g} = \frac{f(a)}{g'(a)}.$$

(iv) Je–li f holomorfní v bodě a a g má v bodě a pól násobnosti 1, pak $\operatorname{res}_a fg = f(a) \cdot \operatorname{res}_a g$.

(v) Je–li f holomorfní v bodě a a g má v bodě a pól násobnosti p, pak

$$\operatorname{res}_a fg = \sum_{k=1}^{p} \frac{f^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} b_{-k},$$

kde $b_{-1}, \ldots, b_{-p}$ jsou koeficienty Laurentovy řady funkce g v $P(a, 0, R)$.

Lemma 1.48 (Jordanovo Lemma)**.** *Nechť $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant \pi$ a f je funkce spojitá na $\{z \in \mathbb{C};\ \arg z \in [\alpha, \beta], |z| > R\}$ pro nějaké $R > 0$, pro kterou platí*

$$\lim_{z \to \infty, \arg z \in [\alpha, \beta]} f(z) = 0.$$

Pro $r > R$ nechť φ_r je křivka definovaná vztahem $\varphi_r(t) = re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Pak pro každé $x > 0$

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\varphi_r} f(z) e^{ixz} \, \mathrm{d}z = 0.$$

Lemma 1.49. *Nechť $a \in \mathbb{C}$ a f je holomorfní v nějakém prstencovém okolí bodu a. Dále nechť $\alpha < \beta$ a $\varphi_r(t) = a + re^{it}$, $t \in [\alpha, \beta]$. Pak platí:*

(i) Pokud f je holomorfní v bodě a, pak $\lim_{r \to 0^+} \int_{\varphi_r} f = 0$.

(ii) Pokud f má v bodě a pól násobnosti 1, pak

$$\lim_{r \to 0^+} \int_{\varphi_r} f = i(\beta - \alpha) \operatorname{res}_a f.$$

1.8. Funkce zadané pomocí komplexních integrálů

Věta 1.50 (o derivaci integrálu podle komplexní proměnné)**.** *Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval a $G \subset \mathbb{C}$ je oblast. Nechť funkce $F : I \times G \to \mathbb{C}$ splňuje následující podmínky:*

(a) Pro skoro všechna $t \in I$ má funkce $G \ni z \mapsto F(t, z)$ spojitou derivaci podle komplexní proměnné na G.

(b) Pro všechna $z \in G$ je funkce $I \ni t \mapsto F(t, z)$ měřitelná.

(c) Existuje $z_0 \in G$, pro které je funkce $t \mapsto F(t, z_0)$ integrovatelná na I.

(d) Pro každé $z \in G$ existuje $r > 0$ a integrovatelná funkce h na I, pro kterou platí $\left|\frac{\partial F}{\partial z}(t, w)\right| \leqslant h(t)$ pro všechna $w \in B(z, r)$ pro skoro všechna $t \in I$.

Potom funkce

$$g(z) = \int_I F(t, z) \, \mathrm{d}t, \quad z \in G$$

je holomorfní na G a pro $z \in G$ platí

$$g'(z) = \int_I \frac{\partial F}{\partial z}(t, z) \, \mathrm{d}t.$$

Definice. Funkci *Gamma* definujeme na množině $D(\Gamma) := \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 0\}$ předpisem

$$\Gamma(z) := \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \, \mathrm{d}t, \quad z \in D(\Gamma).$$

Tvrzení 1.51 (Vlastnosti funkce Gamma)**.** *(i) $\Gamma(z) \in \mathbb{C}$, $z \in D(\Gamma)$.*

(ii) Funkce Γ je holomorfní na $D(\Gamma)$ a pro každé $z \in D(\Gamma)$ platí $\Gamma'(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \log t \, \mathrm{d}t$.

(iii) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, $z \in D(\Gamma)$.

(iv) Funkci Γ je možné jednoznačně rozšířit na funkci definovanou na $\mathbb{C}$, která pro každé $z \in \mathbb{C}$ splňuje rovnici $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ a která je holomorfní na množině $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$. (Toto rozšíření se také značí Γ.)

(v) *Funkce* Γ *má v každém z bodů* $0, -1, -2, -3, \ldots$ *pól násobnosti* 1. *Navíc,* $\operatorname{res}_0 \Gamma = 1$ *a* $\operatorname{res}_{-n} \Gamma = \frac{(-1)^n}{n!}$ *pro* $n = -1, -2, \ldots$.

(vi) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

(vii) *Pro všechna* $z \in \mathbb{C}$ *máme* $\Gamma(z) \neq 0$.

Definice. *Eulerovu zeta funkci* definujeme na množině $D(\zeta_e) = \{z \in \mathbb{C};\ \operatorname{Re} z > 1\}$ předpisem

$$\zeta_e(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

Tvrzení 1.52 (Vlastnosti funkce ζ). (i) $\zeta_e(z) \in \mathbb{C}$, $z \in D(\zeta_e)$.

(ii) *Funkce* ζ_e *je holomorfní na* $D(\zeta_e)$ *a pro každé* $z \in D(\zeta_e)$ *platí* $\zeta_e'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-\log n}{n^z}$.

(iii) *Funkci* ζ *je možné jednoznačně rozšířit na funkci* ζ *definovanou na* $\mathbb{C}$, *která pro každé* $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2, 3, \ldots\}$ *splňuje rovnici*

$$\zeta(z) = 2^z \pi^{z-1} \sin \tfrac{z\pi}{2} \Gamma(1-z) \zeta(1-z)$$

a která je holomorfní na množině $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, *v bodě* 1 *má pól násobnosti* 1 *a* $\operatorname{res}_1 \zeta = 1$.

Definice. Funkci ζ z předchozího tvrzení nazýváme *Riemannova zeta funkce*.

RIEMANNOVA HYPOTÉZA: Pro každé $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} z \in (0,1)$ platí, že pokud $\zeta(z) = 0$ pak $\operatorname{Re} z = 1/2$.

2. Laplaceova a Fourierova transformace

2.1. Laplaceova transformace

Definice. Nechť f je reálná (nebo komplexní) funkce definovaná na intervalu $(0, \infty)$. *Laplaceova transformace funkce* f je funkce $\mathcal{L}(f)$ definovaná předpisem

$$\mathcal{L}(f)(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t,$$

kde $s \in \mathbb{C}$ jsou čísla, pro která je integrál výše konvergentní.

Poznámka. Laplaceovu transformaci jsme definovali i pro komplexní funkce f a komplexní hodnoty s, pro naše účely ale budeme spíše uvažovat reálné funkce a reálné hodnoty s.

Definice. Řekneme, že funkce $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je

- *po částech spojitá na intervalu* $[0, \infty)$, pokud existuje vlastní $f(0^+) := \lim_{t\to 0^+} f(t)$ a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje konečně mnoho bodů $b_1, \ldots, b_k$ takových, že funkce f je spojitá v $(0, n)\backslash\{b_1, \ldots, b_k\}$ a v bodech $b_1, \ldots, b_k$ má funkce f vlastní jednostranné limity.
- *exponenciálního řádu* $c \in \mathbb{R}$, pokud existují konstanty $K, t_0 > 0$ takové, že $|f(t)| \leqslant Ke^{ct}$ pro každé $t \geqslant t_0$.

Tvrzení 2.1. *Nechť funkce $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je po částech spojitá na $[0, \infty)$ a exponenciálního řádu $c \in \mathbb{R}$. Pak $\mathcal{L}(f)(s)$ existuje pro $s > c$ a $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}(f)(s) = 0$.*

Tvrzení 2.2. *Nechť $s > 0$, f je reálná (nebo komplexní) funkce a nechť existuje $\mathcal{L}(f)(s)$. Pak*

(i) pro každé $a \in \mathbb{C}$ máme $\mathcal{L}(af)(s) = a\mathcal{L}(f)(s)$,

(ii) kdykoliv g je reálná (nebo komplexní) funkce, pro kterou existuje $\mathcal{L}(g)(s)$, pak $\mathcal{L}(f + g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) + \mathcal{L}(g)(s)$.

Věta 2.3 (Lerchova věta)**.** *Nechť $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ jsou spojité funkce, pro které existuje $s_0 \in \mathbb{R}$, že $\mathcal{L}(f)(s) = \mathcal{L}(g)(s)$ pro $s > s_0$. Pak $f = g$.*

Tvrzení 2.4 (Laplaceova transformace a posunutí)**.** *Nechť $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je funkce. Označme $F := \mathcal{L}(f)$.*

(i) Pokud $F(s)$ existuje pro každé $s > 0$, pak $F(s - a) = \mathcal{L}(e^{at}f(t))(s)$ pro $a < s$.

(ii) $\mathcal{L}(\chi_{[a,\infty)}(t) \cdot f(t - a))(s) = e^{-as}F(s)$ kdykoliv je $s > 0$ takové, že $F(s)$ je definováno a $a > 0$.

Tvrzení 2.5 (Derivace Laplaceovy transformace)**.** *Nechť funkce $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je po částech spojitá na intervalu $[0, \infty)$ a exponenciálního řádu $c \in \mathbb{R}$. Označme $F = \mathcal{L}(f)$. Pak*

$$F^{(n)}(s) = \mathcal{L}((-1)^n t^n f(t))(s), \quad n \in \mathbb{N},\ s > c.$$

Tvrzení 2.6 (Laplaceova transformace derivace)**.** *Nechť funkce $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je po spojitá na $(0, \infty)$ a exponenciálního řádu $c \in \mathbb{R}$ a nechť její derivace je po částech spojitá na intervalu $[0, \infty)$. Pak*

$$\mathcal{L}(f')(s) = s\mathcal{L}(f)(s) - \lim_{t\to 0^+} f(t), \quad s > c.$$

Důsledek 2.7. *Nechť je dána funkce $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ taková, že $f(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ jsou spojité funkce na $(0, \infty)$ a exponenciálního řádu $c \in \mathbb{R}$ a nechť $f^{(n)}(t)$ je po částech spojitá na intervalu $[0, \infty)$. Pak*

$$\mathcal{L}(f^{(n)})(s) = s^n\mathcal{L}(f)(s) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \ldots - f^{(n-1)}(0^+), \quad s > c.$$

Poznámka. Pokud derivace funkce $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ splňuje, že je spojitá na $[0, \infty)$ a exponenciálního řádu $c \in \mathbb{R}$, pak to samé platí i pro funkci f.

Tvrzení 2.8 (Integrace Laplaceovy transformace)**.** *Nechť funkce $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je po částech spojitá na intervalu $[0, \infty)$, exponenciálního řádu $c \in \mathbb{R}$ a nechť existuje vlastní $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$. Označme $F = \mathcal{L}(f)$. Pak*

$$\int_s^\infty F(x)\,\mathrm{d}x = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(s), \quad s > c.$$

Tvrzení 2.9 (Laplaceova transformace integrálu)**.** *Nechť funkce $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ je po částech spojitá na intervalu $[0, \infty)$ a exponenciálního řádu $c \geqslant 0$. Pak*

$$\mathcal{L}(\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x)(s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f)(s), \quad s > c.$$

Laplaceova transformace - tabulka	
$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s)$
1	$\frac{1}{s}$, $s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$, $s > 0$
$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2s\sqrt{s}}$, $s > 0$
$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\sqrt{\frac{\pi}{s}}$, $s > 0$
$e^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{1}{s-a}$, $s > a$
$t^n e^{at} \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$, $s > a$
$\cos(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s}{s^2+a^2}$, $s > 0$
$\sin(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{a}{s^2+a^2}$, $s > 0$
$t\cos(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$, $s > 0$
$t\sin(at) \quad (a \in \mathbb{R})$	$\frac{2sa}{(s^2+a^2)^2}$, $s > 0$
$e^{at}\sin(bt) \quad (a, b \in \mathbb{R})$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
$e^{at}\cos(bt) \quad (a, b \in \mathbb{R})$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$
$\chi_{[a,\infty)}(t) \quad (a > 0)$	$\frac{e^{-as}}{s}$, $s > 0$

2.2. Řešení diferenciálních rovnic pomocí Laplaceovy transformace

Bylo ukázáno na konkrétních příkladech.

2.3. Fourierova transformace

Definice. Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$ (tj. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ je funkce splňující $\int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, \mathrm{d}x < \infty$). *Fourierova transformace funkce* f je funkce $\widehat{f}$ definovaná předpisem

$$\widehat{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx} \, \mathrm{d}x, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Inverzní Fourierova transformace funkce f je funkce $\check{f}$ definovaná předpisem

$$\check{f}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx} \, \mathrm{d}x, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Poznámka. Někdy také místo $\hat{f}$ používáme značení $\mathcal{F}(f)$ a místo $\check{f}$ používáme někdy $\overline{\mathcal{F}}(f)$.

Tvrzení 2.10. *Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$. Pak $\hat{f}$ je omezená spojitá funkce a*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \widehat{f}(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \check{f}(x) = 0.$$

Tvrzení 2.11 (základní vlastnosti Fourierovy transformace)**.** *Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, $y \in \mathbb{R}$ a $\lambda > 0$. Pak platí:*

(i) $\int_{\mathbb{R}} f(x) \cdot \widehat{g}(x) \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \cdot g(x) \, \mathrm{d}x$.

(ii) $\mathcal{F}(x \mapsto f(x-y))(t) = e^{-iyt} \cdot \widehat{f}(t)$ *pro* $t \in \mathbb{R}$.

(iii) $\widehat{f}(t-y) = \mathcal{F}(x \mapsto f(x) \cdot e^{iyx})(t)$ *pro* $t \in \mathbb{R}$.

(iv) $\mathcal{F}(x \mapsto f(\frac{x}{\lambda}))(t) = \lambda \widehat{f}(\lambda t)$ *pro* $t \in \mathbb{R}$.

(v) $\check{f}(t) = \widehat{f}(-t)$ *pro* $t \in \mathbb{R}$.

Věta 2.12 (Fourierova transformace a derivace)**.** *Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$.*

(i) Pokud má funkce f spojitou derivaci $f' \in L^1(\mathbb{R})$, pak

$$\widehat{(f')}(t) = it\widehat{f}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(ii) Pokud funkce $g(x) := xf(x)$ splňuje $g \in L^1(\mathbb{R})$, pak $\widehat{f}$ má spojitou první derivaci a platí

$$(\widehat{f}\,)'(t) = -i\widehat{g}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Tvrzení 2.13. *Nechť $\Phi(x) = e^{-x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $\widehat{\Phi} = \Phi$.*

Věta 2.14 (o inverzním vzorci)**.** *Nechť $f \in L^1(\mathbb{R})$ a $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Pak pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí*

$$\check{\widehat{f}}(x) = \widehat{\check{f}}(x) = f(x) \quad a \quad f(x) = \widehat{\widehat{f}}(-x).$$

Definice. Nechť $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ jsou měřitelné funkce. Jejich *konvolucí* $f * g$ rozumíme funkci definovanou předpisem

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) \, \mathrm{d}t$$

pro ta $x \in \mathbb{R}$, pro která integrál konverguje.

Tvrzení 2.15 (základní vlastnosti konvoluce)**.** *Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Pak $f * g$ je skoro všude definovaná a skoro všude konečná. Navíc $f * g \in L^1(\mathbb{R})$ a $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$.*

Tvrzení 2.16 (konvoluce a Fourierova transformace)**.** *Nechť $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Pak $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \; \widehat{f} \cdot \widehat{g}$.*

Řešení diferenciálních rovnic pomocí Fourierovy transformace bylo ukázáno na konkrétních příkladech.

3. Variační počet

V celé této kapitole budeme uvažovat následující předpoklady.

Předpoklady: Nechť $a, b, A, B \in \mathbb{R}$, $a < b$ a $f \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$. Označme

$$M := \{y \in \mathcal{C}^1([a,b]);\ y(a) = A, y(b) = B\}$$

a uvažujme zobrazení $F : M \to \mathbb{R}$ definované předpisem

$$F(y) := \int_a^b f(x, y(x), y'(x))\,\mathrm{d}x, \quad y \in M.$$

Argument funkce f značíme (x, y, z). V zájmu přehlednosti zápisu budeme dále používat značení $f_z = \frac{\partial f}{\partial z}$, atd.
Domluvme se ještě, že z důvodu zjednodušení budou v dalším výrazy $y'(a)$ a $y'(b)$ znamenat jednostranné derivace v těchto krajních bodech z vnitřní strany intervalu (a,b). Podobně, budeme-li hovořit o splnění nějaké diferenciální rovnice na $[a,b]$, myslíme tím, že v krajních bodech tuto rovnici splňují odpovídající jednostranné derivace.

Definice. Řekneme, že $y_0 \in M$ je *bodem lokálního minima zobrazení* F, pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $F(y_0) \leqslant F(y)$ kdykoliv $y \in M$ splňuje

$$\forall x \in [a,b] : \quad |y(x) - y_0(x)| < \varepsilon \;\&\; |y'(x) - y_0'(x)| < \varepsilon.$$

Analogicky definujeme *bod lokálního maxima zobrazení* F.

Lemma 3.1 (DuBois-Reymondovo lemma)**.** *Nechť $g \in \mathcal{C}([a,b])$ je funkce, pro kterou platí*

$$\int_a^b g(x)h'(x)\,\mathrm{d}x = 0, \text{ pro každou funkci } h \in \mathcal{C}^1([a,b]) \text{ splňující } h(a) = h(b) = 0.$$

Pak g je konstantní na $[a,b]$.

Věta 3.2 (Euler-Lagrangeova rovnice)**.** *Nechť $y_0 \in M$ je bodem lokálního extrému zobrazení F. Pak funkce*

$$[a,b] \ni x \mapsto f_z(x, y_0(x), y_0'(x))$$

je spojitě diferencovatelná na $[a,b]$ a splňuje Euler-Langrangeovu rovnici

$$f_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_z(x, y_0(x), y_0'(x)) = 0, \quad x \in [a,b]. \tag{3.1}$$

Věta 3.3 (o regularitě minimizéru)**.** *Nechť $y_0 \in M$ je bodem lokálního extrému zobrazení F a $x_0 \in (a,b)$ je bod splňující*

$$f_{zz}(x_0, y_0(x_0), y_0'(x_0)) \neq 0.$$

Pak existuje $\delta > 0$ takové, že $y_0 \in \mathcal{C}^2((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$.

Věta 3.4 (o postačující podmínce globálního minima)**.** *Nechť navíc pro každé $(x,y,z) \in [a,b] \times \mathbb{R}^2$ platí*

$$f_{yy}(x,y,z) \geqslant 0, \quad f_{zz}(x,y,z) \geqslant 0, \quad f_{yy}(x,y,z) f_{zz}(x,y,z) - (f_{yz}(x,y,z))^2 \geqslant 0.$$

Pak $y_0 \in M$ je bodem globálního minima právě tehdy, když platí Euler-Langrangeova rovnice (3.1) *a funkce $x \mapsto f_z(x, y_0(x), y_0'(x))$ je spojitě diferencovatelná na $[a,b]$.*

Věta 3.5. *Jestliže $f = f(y,z)$ nezávisí na proměnné "x" a $y_0 \in M \cap \mathcal{C}^2([a,b])$ řeší Euler-Lagrangeovu rovnici, pak*

$$f(y_0, y_0') - y_0' f_z(y_0, y_0') \equiv C.$$

Definice. Ať $N \subset M$. Řekneme, že $y_0 \in M$ je *bodem lokálního minima zobrazení F vzhledem k množině N*, pokud existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $F(y_0) \leqslant F(y)$ kdykoliv $y \in N$ splňuje

$$\forall x \in [a,b]: \quad |y(x) - y_0(x)| < \varepsilon \ \& \ |y'(x) - y_0'(x)| < \varepsilon.$$

Analogicky definujeme *bod lokálního maxima zobrazení F vzhledem k množině N.*

Věta 3.6 (o Langrangeových multiplikátorech)**.** *Nechť $g \in \mathcal{C}^2([a,b] \times \mathbb{R}^2)$, $K \in \mathbb{R}$ a $y_0 \in M$ je bodem lokálního extrému funkce F vzhledem k množině $\{y \in M;\ G(y) = K\}$, kde*

$$G(y) := \int_a^b g(x, y(x), y'(x))\, \mathrm{d}x, \quad y \in M.$$

Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:

(i) Pro každou funkci $h \in \mathcal{C}^1([a,b])$ splňující $h(a) = h(b) = 0$ platí

$$\int_a^b g_y(x, y, y')h + g_z(x, y, y')h' \, \mathrm{d}x = 0.$$

(ii) Existuje číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že y_0 je "kritickým bodem" zobrazení $F - \lambda G$, tj.

- *funkce $x \mapsto f_z(x, y_0(x), y_0'(x))$, $x \in [a,b]$ je spojitě diferencovatelná*
- *pro každé $x \in [a,b]$ platí*

$$f_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \lambda g_y(x, y_0(x), y_0'(x)) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f_z(x, y_0(x), y_0'(x)) - \lambda g_z(x, y_0(x), y_0'(x))\big) = 0.$$

- *pokud $x_0 \in (a,b)$ je bod splňující*

$$f_{zz}(x_0, y_0(x_0), y_0'(x_0)) - \lambda g_{zz}(x_0, y_0(x_0), y_0'(x_0)) \neq 0,$$

pak existuje $\delta > 0$ takové, že $y_0 \in \mathcal{C}^2((x_0 - \delta, x_0 + \delta))$.

Na přednášce byly detailně předvedeny klasické úlohy variačního počtu: Nejkratší spojnice v rovině a Problém princezny Dido. Dále byla ve stručnosti zmíněna úloha o zavěšeném řetězu.