Kalkulus 3, ZS 2018-2019
Zadání písemné části zkoušky - Varianta A

Příklad 1. Nechť je dána posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ předpisem

$$f_n(x) = \frac{(nx+2)^2}{n^2x^2+4}, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

- Nalezněte funkci f takovou, že $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodově na $\mathbb{R}$ k funkci f.
- Vyšetřete, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na $[0,2]$ k funkci f.
- Vyšetřete, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na $[2,\infty)$ k funkci f.

(10 bodů)

Příklad 2. Nechť je dána množina

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z\sqrt{x^2+y^2} < 2, \sqrt{x^2+y^2} < z+1, z > 0\}.$$

- Proč je množina M měřitelná?
- Spočtěte míru $\lambda^3(M)$ (hint: použijte válcové souřadnice).

(10 bodů)

Příklad 3. Uvažujme funkci F zadanou předpisem

$$F(a) := \int_1^{\infty} \frac{\cos(\frac{x}{a})}{\sqrt{x^7}}\,\mathrm{d}x, \qquad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

- Dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- Dokažte, že funkce F je spojitá na svém definičním oboru.
- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- Spočtěte $\lim_{a\to+\infty} F(a)$.

(10 bodů)

Příklad 4. Pro 4-periodickou funkci f, která je na intervalu $[-2,2)$ definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \in [-2,0), \\ x, & x \in [0,2) \end{cases}$$

nalezněte Fourierovu řadu. Pro každé $x \in [-2,2)$ nalezněte součet této Fourierovy řady.

(10 bodů)

Kalkulus 3, ZS 2018-2019
Zadání písemné části zkoušky - Varianta B

Příklad 5. Nechť je funkce f dána předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2 + 6x - 8)^n.$$

- Nalezněte definiční obor funkce f (tj. určete pro která $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \in \mathbb{R}$).
- Dokažte, že funkce f je spojitá v bodě $7/2$.
- Dokažte, že funkce f má vlastní derivaci v bodě $7/2$ a vyjádřete $f'(7/2)$ jako součet číselné řady.

(10 bodů)

Příklad 6. Nechťje dána množina

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z, x^2 + y^2 \leq \tfrac{z^2}{3}\}.$$

- Proč je množina M měřitelná?
- Proč je funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$, $(x, y, z) \in M$ měřitelná?
- Spočtěte integrál $\int_M f(x, y, z) \, d\lambda^3$ (hint: použijte sférické souřadnice).

(10 bodů)

Příklad 7. Uvažujme funkci F zadanou předpisem

$$F(a) := \int_0^{\infty} e^{-8x} \frac{1 - \cos ax}{x} \, dx, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

- Dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a \in \mathbb{R}$.
- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a \in \mathbb{R}$ pomocí integrálu a příslušný integrál spočtěte. Dostanete tak hodnotu $F'(a)$ pro $a \in \mathbb{R}$.
- Nalezněte primitivní funkci k $F'(a)$ a určete hodnotu integrálu $F(a)$ pro $a \in \mathbb{R}$.

(10 bodů)

Příklad 8. Pro 2π-periodickou funkci f, která je na intervalu $[-\pi, \pi)$ definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \in (-\pi/2, \pi/2), \\ 0, & x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

nalezněte Fourierovu řadu (hint: můžete použít vzorce $\sin x \sin y = \frac{1}{2}\cos(x - y) - \frac{1}{2}\cos(x + y)$ a $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$).

Pomocí Parsevalovy rovnosti pak odvoďte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{\pi((2n-1)^2-4)}\right)^2$.

(10 bodů)

Kalkulus 3, ZS 2018-2019
Zadání písemné části zkoušky - Varianta C

Příklad 9. Nechť je dána posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ předpisem

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{|x + \frac{1}{n^2}| - |x - \frac{1}{n^2}|}{|x + \frac{1}{n^2}| + |x - \frac{1}{n^2}|}, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

- Rozhodněte, zda řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$ *(Hint: rozepište si předpis funkce bez absolutních hodnot pro $x < -1/n^2$, $x \in [-1/n^2, 1/n^2]$ a pro $x > 1/n^2$).*
- Dokažte, že funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je spojitá v bodě 3.
- Dokažte, že funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je klesající na intervalu $(2, \infty)$.

(10 bodů)

Příklad 10. Nechťje dána množina

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < xz < x^2 + y^2 < 1, z > 0\}.$$

- Proč je množina M měřitelná?
- Proč je funkce $f(x, y, z) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $(x, y, z) \in M$ měřitelná?
- Spočtěte integrál $\int_M f(x, y, z)\, \mathrm{d}\lambda^3$ (hint: použijte válcové souřadnice).

(10 bodů)

Příklad 11. Uvažujme funkci F zadanou předpisem

$$F(a) := \int_0^{\infty} \frac{\exp(-a(x+1))}{x+1}(2x+1)\, \mathrm{d}x, \qquad a \in (0, \infty).$$

- Dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a \in (0, \infty)$.
- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a \in (0, \infty)$ pomocí integrálu a vyšetřete monotonii funkce F na $(0, \infty)$.
- Vyjádřete $F''(a)$ pro $a \in (0, \infty)$ pomocí integrálu, vyšetřete konvexitu/konkávitu funkce F na $(0, \infty)$.

Pozn: Můžete bez důkazu používat, že pro každý polynom P a každé $C > 0$ je integrál $\int_0^{\infty} P(x) \exp(-Cx)\, \mathrm{d}x$ konvergentní
(10 bodů)

Příklad 12. Pro 2-periodickou funkci f, která je na intervalu $[-1, 1)$ definována předpisem

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-1, 0], \\ x, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

nalezněte Fourierovu řadu. Pro každé $x \in (-1, 1)$ nalezněte součet této Fourierovy řady.

(10 bodů)

Kalkulus 3, ZS 2018-2019
Zadání písemné části zkoušky - Varianta D

Příklad 13. Nechť je dána posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ předpisem

$$f_n(x) = \exp\Big(n\big(|x-1|-2\big)\Big), \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

- Vyšetřete, pro která $x \in \mathbb{R}$ existuje bodová limita funkcí f_n (tj. pro která $x \in \mathbb{R}$ máme $\lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R}$).
- Vyšetřete, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na $(0, 1]$.
- Vyšetřete, zda posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně na $[1, 3)$.

(10 bodů)

Příklad 14. Nechťje dána množina

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 \leq 1, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}.$$

- Proč je množina M měřitelná?
- Proč je funkce $f(x, y, z) = x^3 z$, $(x, y, z) \in M$ měřitelná?
- Spočtěte integrál $\int_M f(x, y, z)\,\mathrm{d}\lambda^3$ (hint: použijte válcové souřadnice).

(10 bodů)

Příklad 15. Uvažujme funkci F zadanou předpisem

$$F(a) := \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

- Dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a \in \mathbb{R}$.
- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a \in (0, \infty)$ pomocí integrálu.
- Ukažte, že pro každé $x \in (0, \infty)$ a $a \in \mathbb{R}$ platí $\frac{\sin ax}{e^x - 1} = \sin(ax) e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$.
- Ověřte možnost záměny řady a integrálu a vyjádřete pro každé $a \in \mathbb{R}$ integrál $F(a)$ jako číselnou řadu.

(10 bodů)

Příklad 16. Pro 2π-periodickou funkci f, která je sudá a na intervalu $[0, \pi)$ je definována předpisem

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right|, \quad x \in [0, \pi)$$

nalezněte Fourierovu řadu.
Pomocí Parsevalovy rovnosti pak odvoďte součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{(4n+2)^2}\right)^2$.

(10 bodů)