Užitečné zdroje příkladů jsou:

- Materiály ke cvičením z Kalkulu 3 od Kristýny Kuncové: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie08.php`
- **K posloupnostem řad a funkcí**
  - Ilja Černý: Inteligentní kalkulus. Online zde: `http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html`
  - K mocninným řadám se dají použít materiály ke cvičením z Matematické analýzy 2 (2016/17). K nalezení zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/examples.html`
- **K teorii míry a integrálu**
  - Materiály ke cvičením z teorie míry a integrálu (2013/14) na MFF. K nalezení zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/examples.html`
  - Sbírka příkladů (i řešených) z teorie míry: Lukeš - Příklady k teorii Lebesgueova integrálu. Online zde: `http://matematika.cuni.cz/lukes-pli.html`
- **K Fourierovým řadám**
  - Stránky docenta Zeleného, například příklady zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/mff/MA_4/Fourierovy_rady.pdf`
  - Ilja Černý: Inteligentní kalkulus. Online zde: `http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html`

I. STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE POSLOUPNOSTÍ A ŘAD FUNKCÍ

1. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci následujících posloupností funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$:
a) $f_n(x) = x^n$, $x \in [0,1]$ b) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ c) $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $x \in [1,\infty)$
d) $f_n(x) = n \cdot \left(\sqrt{x+1/n} - \sqrt{x}\right)$, $x \in (0,\infty)$ e) $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 3^n}$, $x \in [0,\infty)$

2. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci následujících řad funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$:
a) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ b) $f_n(x) = \exp(-(n+x)^2)$, $x \in [-10,\infty)$ c) $f_n(x) = \log(1+\frac{x^2}{n^2})$, $x \in \mathbb{R}$

3. Nechť $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\sin(1+\frac{x}{n})}{\sqrt{n}}$, $x \in [-1,1]$. Zjistěte, zda je tato funkce spojitá a spočtěte $f'(0)$.

4. Nechť $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in (1,\infty)$. Ukažte, že $f \in \mathcal{C}^1(1,\infty)$.

5. Nechť $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$, $x \in [-1,1]$. Je funkce spojitá? Spočtěte $f'(1/2)$ a $f'(0)$.

6. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} x^n$ $(p \in \mathbb{R})$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}$ $(a,b > 0)$

7. Sečtěte řady všude na intervalu konvergence:
a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

8. Sečtěte řady:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

9. Nalezněte maximální řešení následujících diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou:
a) $y'(x) = 3y(x/2)$, $y(0) = 1$ b) $y'' - xy = 0$, $y(0) = y'(0) = 1$

I. STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE POSLOUPNOSTÍ A ŘAD FUNKCÍ - VÝSLEDKY

1. a) posloupnost bodově konverguje k funkci $f(x) = 0$ pro $x \in [0,1)$ a $f(x) = 1$ pro $x = 1$, posloupnost není stejnoměrně konvergentní b) $f_n \to 0$, posloupnost není stejnoměrně konvergentní c) $f_n \rightrightarrows 0$ d) $f_n \to \frac{1}{2\sqrt{x}}$, posloupnost není stejnoměrně konvergentní e) $f_n \rightrightarrows f$, kde $f(x) = 3$ pro $x \in [0,3]$ a $f(x) = x$ pro $x > 3$
2. a) řada funkcí je stejnoměrně konvergentní b) řada funkcí je stejnoměrně konvergentní c) řada je bodově konvergentní a není stejnoměrně konvergentní
3. funkce je spojitá a $f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\cos 1}{n^{3/2}}$
5. funkce je spojitá, $f'(1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16n^2-4}{(4n^2+1)^2}$, $f'(0)$ neexistuje
6. a) R=1; pokud $p > 1$ pak AK pro $|x| \le 1$ a D jinak; pokud $p \in (0,1]$ pak AK pro $|x| < 1$, K pro $x = -1$ a D pro $x = 1$; pokud $p \le 0$, pak AK pro $|x| < 1$ a D jinak b) R $= 1/4$, AK pro $|x| < R$, jinak D c) R$=\max\{a,b\}$, AK pro $|x| < R$, jinak D
7. a) $x^5 e^{x^4}$, $x \in \mathbb{R}$ b) $\frac{x}{(x-1)^2}$, $x \in (-1,1)$ c) $\log(\frac{1-x}{x}) - \log(1-x) + 1$, $x \in [-1,1] \setminus \{0\}$, součet je 0 pro $x = 0$
8. a) $-\log 2$ b) 2
9. a) $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n! 2^{1+\dots+n}} x^n$, $x \in \mathbb{R}$ b) $y(x) = 1 + x + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_{3n}x^{3n} + a_{3n+1}x^{3n+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$ kde $a_{3n} = \frac{1}{3.2} \cdots \frac{1}{3n(3n-1)}$, $a_{3n+1} = \frac{1}{4.3} \cdots \frac{1}{(3n+1)3n}$ $(n \in \mathbb{N})$

II. KONVERGENCE INTEGRÁLU

1. Určete, zda Lebesgueovy integrály existují a zda jsou konvergentní (s parametry $p, q, s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$)

a) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_{1/2}^1 \sqrt{\frac{1}{\log x}}\,\mathrm{d}x$

výsledky následujících příkladů budeme dále považovat za „známé integrály

e) $\int_2^\infty \frac{1}{x^p(\log x)^q}\,\mathrm{d}x$ f) $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^p(\log 1/x)^q}\,\mathrm{d}x$ g) $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}(\log x)^k\,\mathrm{d}x$ h) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

II. KONVERGENCE INTEGRÁLU - VÝSLEDKY

1. a) K b) K c) existuje, ale nekonverguje d) K e) existuje vždy, konverguje pokud $p > 1$ a $q \in \mathbb{R}$, nebo $p = 1$ a $q > 1$ f) existuje vždy, konverguje pokud $p < 1$ a $q \in \mathbb{R}$, nebo $p = 1$ a $q > 1$ g) existuje vždy, konverguje pokud $s \in (0, \infty)$ a $k \in \mathbb{Z}$, nebo $s = 0$ a $k < -1$ h) existuje vždy, konverguje pokud $p > 0$ a $q > 0$

III. VÍCEROZMĚRNÁ INTEGRACE

1. Pomocí Fubiniovy věty spočtěte míru $\lambda^2(M)$ množiny M: a) M je omezená křivkami $x=2$, $y=x$, $xy=1$
b) M je omezená křivkami: $2x-y=0$, $\quad 2x-y-7=0$, $\quad x-4y+7=0$, $\quad x-4y+14=0$
c) $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x>2,\ 0<y<1/x\}$

2. Pomocí Fubiniovy věty spočtěte $\int_{[3,4]\times[1,2]}\frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}\lambda^2$

3. Popište množinu $M\subset\mathbb{R}^2$ jejíž obsah je dán vzorcem $\int_0^2\int_{y^2}^4 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, vyjádřete obsah množiny jako integrál kde x je vnější proměnná a výpočtem ověřte platnost Fubiniovy věty

4. Spočtěte integrál $\int_0^3\int_y^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

5. Spočtěte míru $\lambda^3(M)$ množiny M: a) M je omezená plochou $z=e^{-x^2}$ a rovinami $y=0$, $y=x$, $x=1$
b) M je omezená plochami $z=6x^2-2xy$, $y=3x-x^2$ a $y=x$

6. Spočtěte $\int\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^2$: a) $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}$; $\quad f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
b) $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ \frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le 2x, x\le x^2+y^2\le 3x\}$; $\quad f(x,y)=\frac{1}{(x^2+y^2)^2}$

7. Spočtěte míru $\lambda^2(M)$ množiny M:
a) $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ (x^2+y^2)^2\le 2a^2(x^2-y^2)\}$ (obsah plochy ohraničené lemniskátou)
b) $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ 2<x+y<3,\ x<y<3x\}$
c) $M=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ (x+y)^3<axy,\ x>0,\ y>0\}$ $(a>0)$

8. Spočtěte míru $\lambda^3(M)$ množiny M: (v úlohách uvažujte všechny parametry kladné)
a) $M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2+z^2}\le r\}$ (objem koule)
b) $M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le 2az, x^2+y^2\le z^2\}$
c) $M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le R^2,\ x^2+y^2\le Rx\}$ (objem Vivianiho okénka)
d) $M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ (R-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2\le a^2\}$, $R>a$ (objem anuloidu)
e) $M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ \frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{3}\le\frac{1}{x^2+2x+3}\}$

9. Spočtěte $\int\int\int_M z^2\,\mathrm{d}\lambda^3$, kde $M=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\le R^2,\ x^2+y^2+z^2\le 2Rz\}$ **$(R>0)$**

10. Dokažte, že $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}/2$ (tzv. Laplaceův integál, dále jej budeme považovat za „známý integrál)

11. Pomocí Fubiniovy věty spočtěte hodnoty následujících Lebesgueových integrálů
a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{arctg}(ax)-\operatorname{arctg}(bx)}{x}\,\mathrm{d}x \quad (ab>0)$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}-e^{-bx^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a\ge 0, b\ge 0)$
c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+a^2x^2)-\log(1+b^2x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad (a,b\in\mathbb{R})$

III. VÍCEROZMĚRNÁ INTEGRACE - VÝSLEDKY

1. a) $3/2-\log 2$ b) 7 c) $+\infty$ **2.** a) $\log\frac{25}{24}$
3. M je ohraničena křivkami $x=4$, $y=0$ a $y^2=x$, máme $\int_0^2\int_{y^2}^4 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^4\int_0^{\sqrt{x}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x=\frac{16}{3}$
4. $\frac{1}{2}(e^9-1)$ **5.** a) $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$ b) $\frac{16}{3}$ **6.** a) 2π b) $\frac{4}{9}\left(2-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ **7.** a) $2a^2$ b) $5/8$ c) $a^2/60$
8. a) $\frac{4}{3}\pi r^3$ b) $a^3\pi$ c) $\frac{2}{3}R^3(\pi-\frac{4}{3})$ d) $2\pi^2Ra^2$ e) $\pi^2\sqrt{3}$
9. $\pi R^5\frac{59}{480}$ **11.** a) $\operatorname{sgn} a\cdot\frac{\pi}{2}\log(a/b)$ b) $\sqrt{\pi b}-\sqrt{\pi a}$ c) $\pi(|a|-|b|)$

IV. INTEGRACE POSLOUPNOSTÍ A ŘAD FUNKCÍ

1. Spočtěte následující limity: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{n}\,\mathrm{d}x$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$
d) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^n}{1+x^{2n}}\,\mathrm{d}x$ e) $\lim\limits_{a\to\infty}\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$ f) $\lim\limits_{a\to 0^+}\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$

2. V následujících příkladech rozviňte integrovanou funkci v řadu, ověřte možnost záměny řady a integrálu a vyjádřete integrál jako číselnou řadu.
a) $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^\infty e^{-x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ $(p,q>0)$ f) $\int_0^\infty \frac{1}{e^{8x}+1}\,\mathrm{d}x$

IV. INTEGRACE POSLOUPNOSTÍ A ŘAD FUNKCÍ

1. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0 e) 0 f) ∞
2. a) $-\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2}$ b) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ c) $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2}$ d) $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$ e) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p+nq}$ f) $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{8(n+1)} \overset{(e)}{=} \frac{\log 2}{8}$

V. INTEGRÁLY ZÁVISLÉ NA PARAMETRU

1. Určete definiční obor následujících reálných funkcí (= množinu všech $a\in\mathbb{R}$, že $F(a)\in\mathbb{R}$) a dokažte, že jsou na svém definičním oboru spojité.
a) $F(a)=\int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $F(a)=\int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{d}x$ c) $F(a)=\int_0^1 \log(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x$

2. Rozhodněte, pro které hodnoty parametrů konvergují následující Lebesgueovy integrály a spočtěte jejich hodnoty pomocí věty o derivování integrálů závislých na parametru.
a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,\mathrm{d}x$

3. Načrtněte grafy funkce $F(a)=\int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x^2}$ (tj. spočtěte první a druhou derivaci, určete monotonii a konvexitu-konkávitu + limity v krajních bodech definičního oboru)

V. INTEGRÁLY ZÁVISLÉ NA PARAMETRU - VÝSLEDKY

1.definiční obory: a) $[0,\infty)$ b) $(0,\infty)$ c) $\mathbb{R}$
2. a) $\log(a+1),\ a\in(-1,\infty)$ b) $\operatorname{arctg}\frac{b}{a},\ a>0,\ b\in\mathbb{R}$. Lze také zapsat: $-\operatorname{arctg}\frac{a}{b}+\frac{\pi}{2}$ pro $a,b>0$; $-\operatorname{arctg}\frac{a}{b}-\frac{\pi}{2}$ pro $a>0,\ b<0$; 0 pro $a>0,\ b=0$
3. bude ukázáno na přednášce

VI. POČÍTÁNÍ INTEGRÁLŮ POMOCÍ FUNKCÍ Γ A B

1.Dokažte platnost následujících vzorců: (tyto vzorce můžete používat v dalších příkladech)
a) $B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} x \sin^{2q-1} x \, \mathrm{d}x$ b) $B(p,q) = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} \, \mathrm{d}x$

2. Spočtěte hodnotu následujících integrálů: a) $\int_0^\infty x^4 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ b) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x \, \mathrm{d}x$
c) $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x^n} \, \mathrm{d}x$ $(0 < p < n,\ n \in \mathbb{N})$ d) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \, \mathrm{d}x$ e) $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{px}}{1+e^{nx}}$ $(0 < p < n,\ n \in \mathbb{N})$

3. Spočtěte hodnotu následujících limit (s použitím Stirlingova vzorce):
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{\sqrt{n}\,\Gamma(n+1/2)}$

VI. POČÍTÁNÍ INTEGRÁLŮ POMOCÍ FUNKCÍ Γ A B - VÝSLEDKY

2. a) $\frac{3}{8}\sqrt{\pi}$ b) $\frac{3}{2^9}\pi$ c) $\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi p}{n}}$ d) $\frac{(\Gamma(1/4))^2}{4\sqrt{2\pi}}$ e) $\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi p}{n}}$
3. a) 4 b) 2π

FOURIEROVY ŘADY

1. Rozložte ve Fourierovy řady periodické prodloužení následujících funkcí a určete jejich součet
a) $f(x) = x, \quad x \in (-\pi, \pi)$ b) $f(x) = x^2, \quad x \in (0, 2\pi)$ (jako důsledek zkuste odvodit, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$)
c) $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-5, 0] \\ 3 & x \in (0, 5) \end{cases}$ d) $f(x) = |x|, \quad x \in [-2, 2]$

2. Pomocí Parsevalovy rovnosti a Fourierovy řady funkce $f(x) = |x|, \quad x \in [-2, 2]$ **(viz. jeden z příkladů výše) určete součet řady** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots$

3. Pomocí Parsevalovy rovnosti a Fourierovy řady funkce $f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi]$ **určete součet řady** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$

4. Napište Fourierovu řadu funkce $f(x) = \begin{cases} 0 & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{6}] \cup [\frac{\pi}{6}, \pi] \\ \cos(3x) & x \in (-\frac{\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}) \end{cases}$**, určete její součet a pomocí Parsevalovy rovnosti odvoďte součet řady** $\sum_{n=1, n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{6}}{(9-n^2)^2}$**.**

5. Pomocí věty o integraci Fourierovy řady nalezněte Fourierovu řadu funkce $g(x) = x^2, \quad x \in (-\pi, \pi)$ **pomocí Fourierovy řady funkce** $f(x) = x, \quad x \in (-\pi, \pi)$ **(viz. jeden z příkladů výše) a pokuste se odvodit součet řady** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$**.**

FOURIEROVY ŘADY - VÝSLEDKY

1. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$, řada konverguje k funkci f b) $\frac{4\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{4}{n^2} \cos(nx) - \frac{4\pi}{n} \sin(nx))$, na intervalu $(0, 2\pi)$ řada konverguje k funkci f, v bodě $x = 0$ má řada součet $2\pi^2$ c) $\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3(1-(-1)^n)}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{5}$, na intervalech $(-5, 0)$ a $(0, 5)$ řada konverguje k funkci f, v bodech $x = -5$, $x = 0$ a $x = 5$ má součet $3/2$ d) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2\pi^2} ((-1)^n - 1) \cos \frac{n\pi x}{2}$, řada konverguje k funkci f

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$
3. $\frac{\pi^4}{90}$
4. $\frac{1}{3\pi} + \frac{1}{6} \cos(3x) + \sum_{n=1, n\neq 3} \frac{6 \cos(n\pi/6)}{(9-n^2)\pi} \cos(nx)$, řada konverguje k funkci f, $\sum_{n=1, n\neq 3}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{6}}{(9-n^2)^2} = \frac{5\pi^2}{(36)^2} - \frac{1}{18 \cdot 9}$
5. $\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$