1. Posloupnosti a řady funkcí

1.1. Stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí

Definice. Nechť E je množina, $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce a pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : E \to \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje bodově na* E k funkci f, pokud pro každé $x \in E$ platí $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Značíme $f_n \to f$.

Řekneme, že posloupnost $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konverguje stejnoměrně na* E k funkci f, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall x \in E\ \forall n \geq k : \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Značíme $f_n \rightrightarrows f$.

Definice. Nechť E je množina, $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce a pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : E \to \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ *konverguje bodově na* E k funkci f, pokud posloupnost částečných součtů $\{\sum_{j=1}^{N} f_j\}_{N=1}^{\infty}$ konverguje bodově na E k funkci f.

Řekneme, že *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně na* E k funkci f, pokud posloupnost částečných součtů $\{\sum_{n=1}^{N} f_n\}_{N=1}^{\infty}$ konverguje stejnoměrně k f. Značíme $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$.

Fakt 1.1. *Stejnoměrně konvergentní posloupnost (resp. řada) funkcí je bodově konvergentní.*

Tvrzení 1.2 (Kritérium stejnoměrné konvergence)**.** *Nechť E je množina, $f : E \to \mathbb{R}$ funkce a pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : E \to \mathbb{R}$ funkce. Pro každé $x \in E$ označme $\sigma_n := \sup_{x\in E} |f_n(x) - f(x)|$. Pak $f_n \rightrightarrows f$ právě když $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$.*

Lemma 1.3 (BC podmnínka pro stejnoměrnou konvergenci)**.** *Nechť E je množina a pro $n \in \mathbb{N}$ je $f_n : E \to \mathbb{R}$ funkce. Pak $f_n \rightrightarrows$ právě když platí*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \forall x \in E : \quad |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

Tvrzení 1.4 (Weierstrassovo kritérium, M-test)**.** *Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada reálných funkcí definovaných na neprázdné množině E. Označme $\sigma_n := \sup_{x\in E} |f_n(x)|$. Jestliže $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n < \infty$, pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ na E.*

Tvrzení 1.5 (Zachování spojitosti)**.** *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných spojitých funkcí definovaných na neprázdné podmnožině $E \subset \mathbb{R}$ a $f : E \to \mathbb{R}$ je funkce.*

(i) Pokud $f_n \rightrightarrows f$ na E, pak f je spojitá.

(ii) Pokud $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows f$ na E, pak f je spojitá.

Tvrzení 1.6 (Prohození limit)**.** *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných funkcí definovaných na omezeném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, která stejnoměrně konverguje na (a, b). Nechť pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje vlastní $\lim_{x\to a^+} f_n(x)$ (resp. $\lim_{x\to b^-} f_n(x)$). Pak*

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a^+} f_n(x) = \lim_{x\to a^+} \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad (\textit{resp. } \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to b^-} f_n(x) = \lim_{x\to b^-} \lim_{n\to\infty} f_n(x)).$$

Speciálně, je–li $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ je řada spojitých reálných funkcí definovaných na omezeném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$, která stejnoměrně konverguje na (a, b) a pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje vlastní $\lim_{x\to a^+} f_n(x)$, pak

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to a^+} f_n(x) = \lim_{x\to a^+} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Tvrzení 1.7 (Záměna sumy a derivace)**.** *Nechť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných spojitých funkcí definovaných na neprázdném omezeném intervalu $(a, b) \subset \mathbb{R}$ splňující*

(i) f_n má vlastní derivaci na (a, b), $n \in \mathbb{N}$,

(ii) existuje $x_0 \in (a, b)$ takové, že číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ je konvergentní,

(iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n' \rightrightarrows$ na (a, b).

Pak $\sum_{n=1}^{\infty} f_n \rightrightarrows$ *na* (a,b) *a pro každé* $x \in (a,b)$ *platí*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

Tvrzení 1.8 (Záměna sumy a integrálu). *Nechť* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost reálných spojitých funkcí definovaných na neprázdném omezeném intervalu* $(a,b) \subset \mathbb{R}$ *splňující*

(i) f_n *má na* (a,b) *konvergentní Newtonův integrál,* $n \in \mathbb{N}$*;*

(ii) *řada* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *konverguje stejnoměrně k funkci* f *na* (a,b)*.*

Pak f *má na* (a,b) *konvergentní Newtonův integrál a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (N)\int_a^b f_n = (N)\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n.$$

1.2. Mocninné řady

Definice. *Mocninnou řadou o středu* $a \in \mathbb{R}$ rozumíme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

kde $a_n \in \mathbb{R}$ pro každé $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a $x \in \mathbb{R}$.

Věta 1.9 (o poloměru konvergence mocninné řady). *Nechť* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *je mocninná řada. Pak existuje právě jeden nezáporný prvek* $\varrho \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *takový, že*

- *pro každé* $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| < \varrho$, *je uvedená řada absolutně konvergentní,*
- *pro každé* $x \in \mathbb{R}$, $|x-a| > \varrho$, *je uvedená řada divergentní.*

Prvek ϱ *splňuje*

$$\varrho = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

kde výrazem $\frac{1}{0}$ *rozumíme* ∞ *a výrazem* $\frac{1}{\infty}$ *rozumíme* 0*. Prvek* ϱ *nazýváme* poloměrem konvergence *uvedené řady.*

Navíc, uvedená řada je stejnoměrně konvergentní na $[a-c, a+c]$ *pro každé* $c < R$*.*

Věta 1.10. *Nechť* $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ *je posloupnost nezáporných čísel a nechť existuje* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$*. Potom existuje také* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ *a limity se rovnají.*

Věta 1.11 (derivace a integrace mocninné řady). *Nechť* ϱ *je poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$*. Potom poloměr konvergence řad* $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$ *a* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ *je také roven* ϱ*. Pro* $x \in \mathbb{R}$ *splňující* $|x-a| < \varrho$ *označme* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$*. Potom*

(i) *funkce* f *má v každém takovém bodě vlastní derivaci a platí* $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$*;*

(ii) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ *je primitivní funkce k* f *na* $(a-\varrho, a+\varrho)$*.*

Speciálně, dostáváme následující vzorec pro výpočet n*-té derivace funkce* f: $f^{(n)}(a) = n! a_n$, $n \geq 0$*.*

Věta 1.12 (Abelova). *Nechť* ϱ *je poloměr konvergence mocninné řady* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *a* $\varrho \in (0, \infty)$*.*

(a) *Jestliže je řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n$ *konvergentní, potom*

$$\lim_{x\to(a+\varrho)_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varrho^n.$$

(b) *Jestliže je řada* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\varrho)^n$ *konvergentní, potom*

$$\lim_{x\to(a-\varrho)_+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-\varrho)^n.$$

2. Teorie míry a integrálu

2.1. Pojem míry, abstraktní Lebesgueův integrál

2.1.1 Základní pojmy

Definice. Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval s krajními body $a, b \in \mathbb{R}$. Pak *délkou* intervalu I rozumíme číslo $|b-a|$. Značíme $\ell(I) := |b-a|$. Dále definujeme $\ell(J) := \infty$, pokud J je neomezený interval.

Nechť $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ jsou intervaly a $Q = I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n$. Pak *objemem* n-rozměrného intervalu Q rozumíme číslo $\ell(I_1) \cdots \ell(I_n)$. Značíme $\ell^n(Q) := \ell(I_1) \cdots \ell(I_n)$.

Konečné disjunktní sjednocení omezených n-rozměrných intervalů nazveme *figurou*. Objem figury definujeme jako součet objemů intervalů, z nichž se skládá. *Horní Jordan-Peanův objem* množiny je infimum objemů figur, které ji obsahují. *Dolní Jordan-Peanův objem* množiny je supremum objemů figur, které jsou v ní obsaženy. Pokud horní a dolní Jordan-Peanův objem množiny se rovnají a jsou konečné, řekneme, že množina je Jordan-Peanovovsky měřitelná a společnou hodnotu nazveme jejím *Jordan-Peanovým (J.P.) objemem.*

Definice. Nechť X je množina. Systém $\mathcal{A}$ podmnožin X se nazývá *algebra*, pokud

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$, $X \in \mathcal{A}$;

(ii) $E \in \mathcal{A} \implies X \setminus E \in \mathcal{A}$;

(iii) $E_1, E_2 \in \mathcal{A} \implies E_1 \cup E_2 \in \mathcal{A}$.

Pokud navíc $\mathcal{A}$ splňuje

(iv) $E_n \in A$, $n = 1, 2, \ldots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$,

pak říkáme, že $\mathcal{A}$ je *σ-algebra.* Je–li $\mathcal{A}$ σ-algebra, dvojice $(X, \mathcal{A})$ se nazývá *měřitelný prostor* a prvky $\mathcal{A}$ se nazývají *měřitelné množiny.*

Fakt 2.1. *Každá algebra (resp. σ-algebra) je uzavřená i na konečné (resp. spočetné) průniky.*

Poznámka. Množina všech J.P.-měřitelných množin není σ-algebra.

Definice. Definujeme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ jako nejmenší σ-algebru obsahující otevřené množiny v $\mathbb{R}^n$. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ se nazývá *borelovská σ-albebra* a jejím prvkům se říká *borelovské množiny.*

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor. Funkce $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ se nazývá *míra*, pokud splňuje

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) jestliže $E_n \in A$, $n = 1, 2, \ldots$ jsou po dvou disjunktní, pak

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n).$$

Trojice $(X, \mathcal{A}, \mu)$ se nazývá *prostor s mírou.*

Poznámka. J.P.-objem není podle naší definice míra, neboť není definována na σ-algebře. Příkladem míry je například tzv. *počítací míra*, která každé množině $A \subset X$ přiřadí počet jejích prvků.

Tvrzení 2.2 (Vlastnosti míry). *Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou.*

(i) Je-li $A, B \in \mathcal{A}$ a $A \subset B$, je $\mu(A) \le \mu(B)$. Navíc, pokud $\mu(B \setminus A) < \infty$, pak $\mu(A) = \mu(B) - \mu(B \setminus A)$.

(ii) Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost z $\mathcal{A}$, je $\mu\big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\big) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

(iii) Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost z $\mathcal{A}$, je $\mu\big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim\limits_n \mu(A_n)$.

(iv) Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ klesající posloupnost z $\mathcal{A}$ a $\mu(A_1) < \infty$, je $\mu\big(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \lim\limits_n \mu(A_n)$.

Definice. Nechť $(X, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s mírou. Řekneme, že míra μ je *úplná*, pokud každá podmnožina množiny míry nula je měřitelná.

2.1.2 Konstrukce úplných měr, Lebesgueova míra

Definice. *Vnější míra* na množině X je zobrazení $\nu : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ splňující

1. $\nu(\emptyset) = 0$;
2. $A \subset B \implies \nu(A) \le \nu(B)$;
3. Je-li $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost podmnožin X, pak $\nu\Big(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n\Big) \le \sum\limits_{n=1}^{\infty} \nu(A_n)$.

Příklad. Definujme funkci $\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \to [0, \infty]$ předpisem

$$\lambda^*(A) := \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} \ell^n(Q_j);\ Q_j \text{ jsou } n\text{-rozměrné intervaly },\ \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \supset A\}.$$

Pak λ^* je vnější míra na $\mathbb{R}^n$, které říkáme *Lebesgueova vnější míra na* $\mathbb{R}^n$.

Definice. Nechť ν je vnější míra na množině X. Množinu $M \subset X$ nazveme ν*-měřitelnou (podle Carathéodoryho)*, jestliže pro každou "testovací" množinu $T \subset X$ platí

$$\nu(T) = \nu(T \cap M) + \nu(T \setminus M).$$

Systém všech (carathéodoryovsky) měřitelných množin značíme $\mathfrak{M}(\nu)$.

Věta 2.3. *Nechť ν je vnější míra na množině X. Pak $\mathfrak{M}(\nu)$ je σ-algebra a funkce $\mathfrak{M}(\nu) \ni A \mapsto \nu(A)$ je úplná míra.*

Definice. Nechť λ^* je Lebesgueova vnější míra na $\mathbb{R}^n$. Funkci $\mathfrak{M}(\lambda^*) \ni A \mapsto \lambda^*(A)$ říkáme *Lebesgueova míra na* $\mathbb{R}^n$ a značíme ji λ^n. Množiny z $\mathfrak{M}(\lambda^*)$ se nazývají *Lebesgueovsky měřitelné.*

Tvrzení 2.4. *Každá borelovská množina je Lebesgueovsky měřitelná, Lebesgueova míra je úplná a pro každý n-rozměrný interval $Q \subset \mathbb{R}^n$ platí $\ell^n(Q) = \lambda^n(Q)$. Navíc, Lebesgueova míra je translačně invariantní, tj. pro každou měřitelnou množinu A a každý vektor $c \in \mathbb{R}^n$ máme $\lambda^n(A+c) = \lambda^n(A)$, kde $A + c = \{a + c :\ a \in A\}$.*

2.1.3 Měřitelná zobrazení

Značení. Je–li X množina a $A \subset X$, pak *charakteristická funkce množiny* A je funkce $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

Je–li $f : D \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ funkce a $M \subset \mathbb{R}$, značíme

$$\{f \in M\} := \{x \in D;\ f(x) \in M\},$$

podobně zavádíme značení jako $\{f > a\}$, $\{f = a\}$.

V celé této subsekci je $(X, \mathcal{A})$ měřitelný prostor.

Definice. Nechť $(Y, \mathcal{A}_2)$ je měřitelný prostor. Zobrazení $f : X \to Y$ je $(\mathcal{A}, \mathcal{A}_2)$*-měřitelné*, pokud pro každou $E \in \mathcal{A}_2$ je $\{f \in E\} \in \mathcal{A}$.

Úmluva. Pokud je z kontextu jasné co je $\mathcal{A}$ a $\mathcal{A}_2$, pak říkáme, že funkce je "měřitelná" místo "$(\mathcal{A}, \mathcal{A}_2)$-měřitelná"

Tvrzení 2.5. *Nechť $f : X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ je funkce splňující, že pro každý otevřený interval $I \subset \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ máme $f^{-1}(I) \in \mathcal{A}$. Pak f je měřitelná funkce.*

Tvrzení 2.6. *(i) Kdykoliv $G \subset \mathbb{R}^n$ a $f : G \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, pak f je měřitelná.*

(ii) Funkce $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ je měřitelná pro každou $A \in \mathcal{A}$.

(iii) Složení měřitelných funkcí je měřitelná funkce.

(iv) Součet, součin, podíl, maximum a minimum konečně mnoha reálných měřitelných funkcí jsou opět měřitelné funkce.

(v) Je-li $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ posloupnost měřitelných funkcí, jsou i $\sup f_n, \inf f_n, \limsup f_n, \liminf f_n$ (a tedy i $\lim f_n$, existuje-li) měřitelné funkce.

2.1.4 Lebesgueův integrál

V celé této subsekci je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

Značení. Je–li $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ funkce, definujeme $f^+ := \max\{f, 0\}$ a $f^- := \max\{-f, 0\}$. (Maximum/minimum funkcí definujeme bodově.) Tedy $f = f^+ - f^-$ a $|f| = f^+ + f^-$.

Definice. Konečný soubor množin $\{A_1, \ldots, A_m\} \subset \mathcal{A}$ nazveme *rozkladem* množiny $E \in \mathcal{A}$, jestliže množiny A_j jsou po dvou disjunktní a $\bigcup_{j=1}^m A_j = E$.

Fráze *skoro všude* nebo *μ-skoro všude* se používá ve spojení s vlastností bodů množiny X. Řekneme-li, že taková vlastnost platí skoro všude (nebo ve skoro všech bodech), znamená to, že je splněna až na množinu míry nula, neboli, že existuje množina $N \in \mathcal{A}$ míry nula tak, že vlastnost je splněna ve všech bodech množiny $X \setminus N$.

Definice. Nechť f je měřitelná funkce (s hodnotami v $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$).

1. Je–li $f \geq 0$, definujeme

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \sum_{j=1}^m a_j \mu(A_j);\ \{A_j\}_{j=1}^m \text{ je rozklad } X, 0 \leq a_j \leq f \text{ na } A_j,\ j = 1, \ldots, m \right\},$$

   kde používáme konvenci že $0 \cdot \infty = 0$.

2. V obecném případě definujeme

$$\int_X f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_X f^- \,\mathrm{d}\mu,$$

   pokud má tento rozdíl smysl.

3. Je–li $E \subset X$, $E \in \mathcal{A}$ a funkce f je definovaná skoro všude na E, pak definujeme

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu := \int_X f \cdot \chi_{E \cap D(f)} \,\mathrm{d}\mu.$$

Je-li integrál $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$ defiován, říkáme též, že *má smysl*, nebo že funkce f *má integrál*. Je-li navíc tento integrál konečné číslo, říkáme, že $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$ *konverguje*, nebo že f je *integrovatelná* a tento fakt značíme symbolem $f \in L^1(E, \mathcal{A}, \mu)$, nebo zkráceně $f \in L^1(E)$.

Věta 2.7 (Základní vlastnosti Lebesgueova integrálu)**.** *Nechť f a g jsou měřitelné funkce, $\alpha \in \mathbb{R}$ a $E \in \mathcal{A}$. Pak*

(i) $\int_X \chi_E \,\mathrm{d}\mu = \mu(E)$;

(ii) $\int_E f \,\mathrm{d}\mu = 0$, *pokud* $\mu(E) = 0$ *nebo pokud* $f = 0$ *skoro všude na* E;

(iii) Pokud $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu$ *konverguje, pak* $|f| < \infty$ *skoro všude na* E;

(iv) Pokud je $\mu(E) < \infty$ *a* f *je omezená, pak* $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$ *konverguje a* $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{x \in E} |f(x)| \cdot \mu(E)$;

(v) Je–li $\{D_1, D_2\} \subset \mathcal{A}$ *rozklad množiny* E, *pak*

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \int_{D_1} f \,\mathrm{d}\mu + \int_{D_2} f \,\mathrm{d}\mu;$$

(vi)

$$\int_E \alpha f + g \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_E f \,\mathrm{d}\mu + \int_E g \,\mathrm{d}\mu,$$

má–li pravá strana smysl;

(vii) $\int_E f \,\mathrm{d}\mu$ *konverguje právě tehdy, když* $\int_E |f| \,\mathrm{d}\mu$ *konverguje;*

(viii) Jestliže f, g *mají integrál a* $f \leq g$ *skoro všude na* E, *pak*

$$\int_E f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_E g \,\mathrm{d}\mu;$$

(ix)

$$\left| \int_E f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_E |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

2.1.5 Vztah Lebesgueova integrálu k Newtonovu integrálu a Riemannovu integrálu

V moderní matematické literatuře se integrálem bez přívlastku rozumí vždy integrál Lebesgueův. Význam Newtonova a Riemannova integrálu zůstává ve sféře didaktiky.

Věta 2.8 (Vztah mezi Newtonovým a Lebesgueovým integrálem)**.** *Nechť f je nezáporná spojitá funkce na intervalu (a, b). Potom $(N) - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje, právě když konverguje Lebesgueův integrál funkce f. V tom případě mají oba integrály společnou hodnotu.*

Věta 2.9 (Vztah mezi Riemannovým a Lebesgueovým integrálem)**.** *Nechť f je Riemannovsky integrovatelná funkce na $[a, b]$. Potom Lebesgueův integrál funkce f od a do b konverguje a je roven integrálu Riemannovu.*

2.2. Fubiniova věta

Lemma 2.10. *Nechť $n, m \in \mathbb{N}$ a $E \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset \mathbb{R}^m$ jsou Lebesgueovsky měřitelné množiny. Pak $E \times F$ je Lebesgueovsky měřitelná množina a $\lambda^{n+m}(E \times F) = \lambda^n(E) \cdot \lambda^m(F)$, kde definujeme $0 \cdot \infty = 0$.*

Definice. Nechť $E \subset X \times Y$. Značíme

$$\begin{aligned} E^{x,*} &:= \{y \in Y;\ (x, y) \in E\}, \qquad x \in X, \\ E^{*,y} &:= \{x \in X;\ (x, y) \in E\}, \qquad y \in Y. \end{aligned}$$

Tyto množiny se nazývají *řezy.*

Věta 2.11 (Fubiniova věta)**.** *Nechť $n, m \in \mathbb{N}$, $E \subset \mathbb{R}^{n+m}$ je Lebesgueovsky měřitelná množina a $f : E \to \mathbb{R}$ je Lebesgueovsky měřitelná funkce. Předpokládejme, že integrál*

$$\int_M f(x, y)\,\mathrm{d}\lambda^{n+m}$$

má smysl. Potom všechny integrály níže mají smysl a platí

$$\int_E f\,\mathrm{d}\lambda^{n+m} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E^{x,*}} f(x, y)\,\mathrm{d}\lambda^m(y) \right) \mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E^{*,y}} f(x, y)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \right) \mathrm{d}\lambda^m(y). \quad (2.1)$$

Speciálně, je–li $f \geq 0$ nebo je jeden z integrálů

$$\int_E |f|\,\mathrm{d}\lambda^{n+m}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{E^{x,*}} |f(x, y)|\,\mathrm{d}\lambda^m(y) \right) \mathrm{d}\lambda^n(x), \quad \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{E^{*,y}} |f(x, y)|\,\mathrm{d}\lambda^n(x) \right) \mathrm{d}\lambda^m(y)$$

konečný, pak platí (2.1).

2.3. Věta o substituci

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi_i \in \mathcal{C}^1(G)$, $i = 1, \dots, n$. Uvažujme funkci $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) : G \to \mathbb{R}^n$. Pak *Jacobiho matice zobrazení φ v bodě t* je matice

$$\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(t) \right)_{i,j=1}^n .$$

Pokud má Jacobiho matice zobrazení φ v každém bodě $t \in G$ hodnost n, pak řekneme, že φ je *regulární* a determinant Jacobiho matice nazýváme *jakobiánem* zobrazení φ v bodě t a značíme jej $J_\varphi(t)$.

Věta 2.12 (O substituci)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $\varphi : G \to \mathbb{R}^n$ je prosté regulární zobrazení. Nechť f je funkce na $E \subset \varphi(G)$. Potom*

$$\int_E f(x)\,\mathrm{d}\lambda^n(x) = \int_{\varphi^{-1}(E)} f(\varphi(t))|J_\varphi(t)|\,\mathrm{d}\lambda^n(t),$$

pokud alespoň jedna strana má smysl.

Věta 2.13 (o polárních souřadnicích)**.** *Nechť* $G = \{(r,\alpha) \in \mathbb{R}^2;\ r > 0, \alpha \in (-\pi,\pi)\}$ *a zobrazení* $\varphi : G \to \mathbb{R}^2$ *je dáno předpisem* $\varphi(r,\alpha) := (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$*,* $(r,\alpha) \in G$*. Pak* φ *je prosté regulární zobrazení a* $|J_\varphi(r,\alpha)| = r$ *pro* $(r,\alpha) \in G$*. Je–li* $E \subset \mathbb{R}^2$ *a* f *funkce na* E*, pak*

$$\int_E f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^2(x,y) = \int_{G\cap\varphi^{-1}(E)} r \cdot f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\,\mathrm{d}\lambda^2(r,\alpha),$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

Věta 2.14 (o válcových souřadnicích)**.** *Nechť* $G = \{(r,\alpha,z) \in \mathbb{R}^3;\ r > 0, \alpha \in (-\pi,\pi)\}$ *a zobrazení* $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ *je dáno předpisem* $\varphi(r,\alpha,z) := (r\cos\alpha, r\sin\alpha, z)$*,* $(r,\alpha,z) \in G$*. Pak* φ *je prosté regulární zobrazení a* $|J_\varphi(r,\alpha)| = r$ *pro* $(r,\alpha,z) \in G$*. Je–li* $E \subset \mathbb{R}^3$ *a* f *funkce na* E*, pak*

$$\int_E f(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) = \int_{G\cap\varphi^{-1}(E)} r \cdot f(r\cos\alpha, r\sin\alpha, z)\,\mathrm{d}\lambda^3(r,\alpha,z),$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

Věta 2.15 (o sférických souřadnicích)**.** *Nechť* $G = \{(r,\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^3;\ r > 0, \alpha \in (-\pi,\pi), \beta \in (-\pi/2,\pi/2)\}$ *a zobrazení* $\varphi : G \to \mathbb{R}^3$ *je dáno předpisem* $\varphi(r,\alpha,\beta) := (r\cos\alpha\cos\beta, r\sin\alpha\cos\beta, r\sin\beta)$*,* $(r,\alpha,\beta) \in G$*. Pak* φ *je prosté regulární zobrazení a* $|J_\varphi(r,\alpha,\beta)| = r^2\cos\beta$ *pro* $(r,\alpha,\beta) \in G$*. Je–li* $E \subset \mathbb{R}^3$ *a* f *funkce na* E*, pak*

$$\int_E f(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda^3(x,y,z) = \int_{G\cap\varphi^{-1}(E)} r^2\cos\beta \cdot (r\cos\alpha\cos\beta, r\sin\alpha\cos\beta, r\sin\beta)\,\mathrm{d}\lambda^3(r,\alpha,\beta),$$

má–li alespoň jedna strana rovnosti smysl.

2.4. Prohození integrálu a limity, integrálu a řady

V celé této sekci je $(X,\mathcal{A},\mu)$ prostor s mírou.

Definice. Nechť E je množina a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ funkce. Řekneme, že posloupnost $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ *konverguje skoro všude na* E k funkci $f : E \to \mathbb{R}$, pokud $E \in \mathcal{A}$ a existuje $F \subset E$ taková, že $f_j|_F \to f|_F$ a $\lambda^n(E \setminus F) = 0$.

Řekneme, že $\sum_{j=1}^\infty f_j$ *konverguje skoro všude na* E, pokud posloupnost částečných součtů $\{\sum_{j=1}^N f_j\}_{N=1}^\infty$ konverguje skoro všude na E.

Věta 2.16 (Leviho věta)**.** *Nechť* $E \in \mathcal{A}$ *a pro* $j \in \mathbb{N}$ *je* $f_j : E \to \mathbb{R}$ *měřitelná funkce. Nechť posloupnost funkcí* $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ *bodově konverguje na* E *a splňuje* $\int_E f_1\,\mathrm{d}\mu > -\infty$ *a* $f_1 \le f_2 \le \dots$*. Pak*

$$\int_E \lim_{j\to\infty} f_j\,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty}\int_E f_j\,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 2.17 (Lebesgueova věta)**.** *Nechť* $E \in \mathcal{A}$ *a pro* $j \in \mathbb{N}$ *je* $f_j : E \to \mathbb{R}$ *měřitelná funkce. Nechť posloupnost funkcí* $\{f_j\}_{j=1}^\infty$ *konverguje bodově skoro všude na* E*. Nechť existuje integrovatelná funkce* $g : E \to \mathbb{R}$ *(takzvaná* majoranta*) taková, že*

$$|f_j(x)| \le g(x), \quad j \in \mathbb{N},\ x \in E.$$

Pak

$$\int_E \lim_{j\to\infty} f_j\,\mathrm{d}\mu = \lim_{j\to\infty}\int_E f_j\,\mathrm{d}\mu.$$

Důsledek 2.18 (Lebesgueova věta pro řady)**.** *Nechť* $E \in \mathcal{A}$ *a pro* $j \in \mathbb{N}$ *je* $f_j : E \to \mathbb{R}$ *měřitelná funkce. Nechť* $\sum_{j=1}^\infty f_j$ *konverguje skoro všude na* E*. Nechť existuje integrovatelná funkce* $g : E \to \mathbb{R}$ *(takzvaná* majoranta*) taková, že*

$$\left|\sum_{j=1}^N f_j(x)\right| \le g(x), \quad N \in \mathbb{N},\ x \in E.$$

Pak

$$\int_E \sum_{j=1}^\infty f_j\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^\infty \int_E f_j\,\mathrm{d}\mu.$$

Důsledek 2.19. *Nechť $E \in \mathcal{A}$ a pro $j \in \mathbb{N}$ je $f_j : E \to \mathbb{R}$ měřitelná funkce. Nechť je splněna jedna z následujících podmínek*

(i) $f_j = aq^j$, *kde* a, q *jsou měřitelné funkce,* $|q| < 1$ *a* $\int_E \frac{a}{1-q} \, \mathrm{d}\mu$ *konverguje*

(ii) $\sum_j \int_E |f_j| \, \mathrm{d}\mu < \infty$ *nebo* $\int_E \sum_j |f_j| \, \mathrm{d}\mu < \infty$,

(iii) $f_j = (-1)^j h_j$, $h_j \to 0$, $h_1 \geq h_2 \geq h_3 \geq \ldots \geq 0$ *a* $\int_E h_1 \, \mathrm{d}\mu < \infty$

Pak řada $\sum_{j=1}^{\infty} f_j$ *konverguje skoro všude a platí*

$$\int_E \sum_{j=1}^{\infty} f_j \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_E f_j \, \mathrm{d}\mu.$$

2.5. Integrály závislé na parametru

V celé této sekci je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor s mírou.

Věta 2.20 (Spojitost integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť $E \in \mathcal{A}$, $a \in \mathbb{R}^n$ a nechť U je otevřená množina obsahující bod a. Nechť funkce $f : U \times E \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(i) Pro skoro všechna $x \in E$ je funkce $U \ni t \mapsto f(t, x)$ spojitá v a,

(ii) pro všechna $t \in U$ je funkce $E \ni x \mapsto f(t, x)$ měřitelná,

(iii) existuje integrovatelná funkce g na E tak, že pro všechna $t \in U$ a $x \in E$ je $|f(t, x)| \leq g(x)$.

Potom pro všechna $t \in U$ je $E \ni x \mapsto f(t, x)$ integrovatelná a funkce

$$F(t) := \int_E f(t, x) \, \mathrm{d}\mu(x), \quad t \in U$$

je spojitá v bodě a.

Věta 2.21 (Derivace integrálu závislého na parametru)**.** *Nechť $E \in \mathcal{A}$ a $I \subset \mathbb{R}$ je otevřený interval. Nechť funkce $f : I \times E \to \mathbb{R}$ má následující vlastnosti:*

(i) Pro skoro všechna $x \in E$ má funkce $I \ni t \mapsto f(t, x)$ vlastní derivaci na celém intervalu I,

(ii) pro všechna $t \in I$ je funkce $E \ni x \mapsto f(t, x)$ měřitelná,

(iii) existuje integrovatelná funkce g na E tak, že pro všechna $t \in I$ a $x \in E$ je $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t, x)\right| \leq g(x)$,

(iv) existuje $t_0 \in I$ tak, že funkce $E \ni x \mapsto f(t_0, x)$ je integrovatelná.

Pak pro všechna $t \in I$ je funkce $E \ni x \mapsto f(t, x)$ integrovatelná, funkce

$$F(t) := \int_E f(t, x) \, \mathrm{d}\mu(x), \quad t \in I$$

má vlastní derivaci na celém intervalu I a platí

$$F'(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \, \mathrm{d}\mu(x), \quad t \in I.$$

Definice. Funkci *Gamma* definujeme na intervalu $(0, \infty)$ předpisem

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} \, \mathrm{d}x, \quad s \in (0, \infty).$$

Funkci *Beta* definujeme na $(0, \infty) \times (0, \infty)$ předpisem

$$B(p, q) := \int_0^1 x^{p-1} (1 - x)^{q-1} \, \mathrm{d}x, \quad (p, q) \in (0, \infty).$$

Tvrzení 2.22 (Vlastnosti funkce Gamma)**.** *(i)* $\Gamma(s) \in (0, \infty)$, $s \in (0, \infty)$;

(ii) $\Gamma(1) = 1$ *a pro každé* $s \in (0,\infty)$ *platí* $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. *Speciálně,* $\Gamma(n+1) = n!$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$*;*

(iii) $\Gamma \in \mathcal{C}^k(0,\infty)$, $k \in \mathbb{N}$*;*

(iv) Γ *je ryze konvexní na* $(0,\infty)$*;*

(v) $\lim_{s\to 0^+} \Gamma(s) = \lim_{s\to\infty} \Gamma(s) = +\infty$*;*

(vi) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Tvrzení 2.23 (Vlastnosti funkce Beta)**.** *(i) Pro každé* $p, q \in (0,\infty)$ *máme* $B(p,q) \in (0,\infty)$*;*

(ii) pro každé $p, q \in (0,\infty)$ *máme* $pB(p,q+1) = qB(p+1,q)$*;*

(iii) pro každé $p, q \in (0,\infty)$ *máme* $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$ *(speciálně* $B(p,q) = B(q,p)$*);*

(iv) $B \in \mathcal{C}^k((0,\infty)\times(0,\infty))$, $k \in \mathbb{N}$*;*

(v) $B(1-s,s) = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$, $s \in (0,1)$.

Tvrzení 2.24 (objem n-rozmerne koule)**.** *Nechť je dána* n*-rozměrná koule* $B(0,R) \subset \mathbb{R}^n$. *Pak* $\lambda^n(B(0,R)) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)} R^n$.

Tvrzení 2.25 (Stirlingův vzorec)**.**

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\frac{e}{s}\right)^s \Gamma(s+1) = \sqrt{2\pi}.$$

3. Fourierovy řady

Definice. Funkce $\sum_{n=0}^{k}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ se nazývá *trigonometrický polynom*.
Řada $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$ se nazývá **trigonometrická řada**.

Tvrzení 3.1. *(i) Jsou–li $f,g\in\{1,\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x\ldots\}$ a $f\neq g$, pak $\int_{-\pi}^{\pi} fg=0$.*

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot 1\,\mathrm{d}x=2\pi$, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x=\pi$, $n\in\mathbb{N}$.

Značení. Množinu všech 2π-periodických reálných funkcí, které jsou integrovatelné na intervalu $[0,2\pi]$ budeme značit $\mathcal{P}([0,2\pi])$.

Definice. Nechť f je reálná funkce definovaná na $(-\pi,\pi)$. Čísla

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \text{ pro } n=0,1,2,...$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \text{ pro } n=1,2,...$$

se nazývají *Fourierovy koeficienty* funkce f.
Řada

$$Sf(x):=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)),\quad x\in\mathbb{R}$$

se nazývá *Fourierova řada* funkce f. Budeme tuto skutečnost značit

$$f(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))\,.$$

Pro $N\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ dále definujeme *částečný součet Fourierovy řady funkce f* předpisem

$$S_Nf(x):=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)),\quad x\in\mathbb{R}.$$

Tvrzení 3.2. *Nechť $f\in\mathcal{P}([0,2\pi])$ a máme posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ splňující, že*

$$\tfrac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))=f(x),\ x\in\mathbb{R},$$

přičemž řada nalevo je stejnoměrně konvergentní. Pak a_0, a_n, b_n ($n\in\mathbb{N}$) jsou Fourierovy koeficienty funkce f.

Poznámka. Je-li funkce $f\in\mathcal{P}([0,2\pi])$ lichá (resp. sudá), platí totéž o každé z funkcí $f(x)\cos(nx)$, zatímco všechny funkce $f(x)\sin(nx)$ jsou sudé (resp. liché). Vidíme tedy, že pokud je funkce f lichá, pak $a_n=0$, $n\geq 0$ a $b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin(nx)$. Pokud je funkce f sudá, pak $b_n=0$, $n\geq 1$ a $a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos(nx)$, $n\geq 0$.

Pokud je $a_n=0$, $n\geq 0$ (resp. $b_n=0$, $n\geq 1$), hovoříme někdy o *liché* nebo *sinové* (resp. *sudé* nebo *cosinové*) Fourierově řadě funkce f.

Poznámka. Každou funkci f definovanou na intervalu I délky 2π splňující $\int_I f<\infty$ lze periodicky rozšířit na $f\in\mathcal{P}([0,2\pi])$; Fourierovu řadu takto rozšířené funkce někdy nazýváme *Fourierovou řadou funkce f v intervalu I*.

Podobně lze každou funkci f definovanou v intervalu $(0,\pi)$ splňující $\int_0^{\pi}f<\infty$ rozšířit jak na lichou, tak i na sudou funkci z $\mathcal{P}([0,2\pi])$. Příslušnou Fourierovu řadu nazýváme *lichou resp. sudou Fourierovou řadou funkce f*. Analogickou terminologii můžeme použít pro funkce definované na intervalu $(-\pi,0)$.

Poznámka. Z výsledků o 2π-periodických funkcích dostáváme automaticky výsledky o C-periodických funkcích ($C > 0$). Vskutku, máme–li C-periodickou funkci $f(x)$, pak předpis $g(x) := f(Cx/2\pi)$ definuje funkci 2π-periodickou a teorii můžeme aplikovat na funkci g. Fourierovy koeficienty funkce f jsou pak definovány jako

$$a_n = \frac{2}{C}\int_{-C/2}^{C/2} f(x)\cos(2\pi nx/C)\,\mathrm{d}x\,, \quad b_n = \frac{2}{C}\int_{-C/2}^{C/2} f(x)\sin(2\pi nx/C)\,\mathrm{d}x\,.$$

Fourierova řada funkce f je řada

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n\cos(2\pi nx/C) + b_n\sin(2\pi nx/C)\big)\,.$$

Definice. Ať $[a,b] \subset \mathbb{R}$ je interval. Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se nazývá *po částech hladká*, jestliže existují body $a = p_0 < p_1 < ... < p_n = b$ takové, že $f \in \mathcal{C}^1([p_{i-1},p_i])$ (tj. pro každé $i = 1,\dots,n$ je $f \in \mathcal{C}([p_{i-1},p_i])$, derivace funkce f je spojitá funkce na (p_{i-1},p_i) a má v krajních bodech vlastní jednostranné limity).

Funkce $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se nazývá *po částech monotónní*, jestliže existují body $a = p_0 < p_1 < ... < p_n = b$ takové, že f je na každém intervalu $[p_{i-1},p_i]$ monotonní.

Značení. Nechť $a \in \mathbb{R}$ a f je reálná funkce definovaná na nějakém okolí bodu a. Značíme

$$f(a+) := \lim_{x\to a^+} f(x)\,, \quad f(a-) := \lim_{x\to a^-} f(x),$$

pokud tyto limity existují.

Věta 3.3 (Konvergence Fourierovy řady)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}([0,2\pi])$, $(a,b) \subset \mathbb{R}$ a $f|_{[a,b]}$ je po částech hladká nebo po částech monotonní. Pak pro každé $x \in (a,b)$ platí $Sf(x) = \frac{f(x+)+f(x-)}{2}$.*

Navíc, pokud je tato funkce spojitá na (a,b), pak Fourierova řada stejnoměrně konverguje na každém uzavřeném intervalu ležícím uvnitř (a,b). Speciálně, je–li $b-a > 2\pi$, pak Fourierova řada funkce f stejnoměrně konverguje v celém $\mathbb{R}$.

Věta 3.4 (Parsevalova rovnost)**.** *Nechť $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje. Pak*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\,,$$

kde a_0, a_n, b_n ($n \in \mathbb{N}$) jsou Fourierovy koeficienty funkce f.

Věta 3.5 (Primitivní funkce pomocí Fourierových koeficientů)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ a nechť $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$. Uvažume funkci $F(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{1}{2}a_0x$, $x \in \mathbb{R}$. Pak $F \in \mathcal{P}([0,2\pi])$, Fourierova řada funkce F je určena jako*

$$F(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n\cos(nx) + a_n\sin(nx)}{n}.$$

a tato řada stejnoměrně konverguje k funkci F na $(-\infty,\infty)$.

Speciálně,

(i) pokud jsou všechny Fourierovy koeficienty funkce f nulové, pak $f = 0$ skoro všude;

(ii) platí

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-b_n\cos(nx) + (a_n + (-1)^{n+1}a_0)\sin(nx)}{n}, \quad x \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

a Fourierova řada funkce $[-\pi,\pi] \ni x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ konverguje a je určena vzorcem (3.1).

(iii) pokud je funkce f spojitá na intervalu $(a,b) \subset [-\pi,\pi]$, pak funkce $(a,b) \ni x \mapsto \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (popsaná dvěma různými vzorci výše) je primitivní funkce k f na (a,b).

Věta 3.6 (Derivace Fourierovy řady)**.** *Nechť $f \in \mathcal{P}([0,2\pi])$ a $f \in \mathcal{C}^1(-\pi,\pi)$ a nechť $f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$. Nechť $\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|\,\mathrm{d}x < \infty$. Pak Fourierova řada pro f' se získá z Fourierovy řady pro f derivací člen po členu, tj.*

$$f'(x) \approx \sum_{n=1}^{\infty}(-na_n\sin(nx) + nb_n\cos(nx)).$$