1. Taylorův polynom - aplikace

1.1. Opakování z minulého semestru

Definice. Nechť f je funkce, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a existuje vlastní $f^{(n)}(a)$. Pak polynom

$$T_n^{f,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n$$

nazýváme **Taylorovým polynomem řádu n funkce f v bodě a.**

Věta 1.1 (Charakterizace Taylorova polynomu)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a nechť má funkce f v bodě a vlastní n-tou derivaci. Potom polynom $T_n^{f,a}(x)$ je jediný polynom stupně nejvýše n splňující*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Důsledek 1.2. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ a nechť má funkce f v bodě a vlastní n-tou derivaci. Potom*

$$f(x) = T_n^{f,a}(x) + \omega(x)(x-a)^n,$$

kde $\lim_{x \to a} \omega(x) = 0$.

Věta 1.3. *Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ a nechť má funkce f v každém bodě intervalu $(a-r, a+r)$ vlastní derivaci řádu $(n+1)$. Pak*

$$\forall x \in (a-r, a+r): \quad |f(x) - T_n^{f,a}(x)| \leq \frac{r^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{|y-a|<r} |f^{(n+1)}(y)|.$$

Věta 1.4 (Taylorův polynom základních funkcí)**.** *Nechť $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, pak*

$$\begin{aligned}
T_n^{\exp,0}(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} \\
T_{2n-1}^{\sin,0}(x) = T_{2n}^{\sin,0}(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} \\
T_{2n}^{\cos,0}(x) = T_{2n+1}^{\cos,0}(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \\
T_n^{\log,0}(x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \\
\forall \alpha \in \mathbb{R}: \ T_n^{(1+x)^\alpha,0}(x) &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n.
\end{aligned}$$

1.2. Příklady

1. Odhadněte absolutní chybu aproximace daných funkcí na daných intervalech:

a) $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6},\ x \in [-1/2, 1/2]$

2. Spočtěte $\sqrt{5}$ **s přesností** 10^{-4}

3. Najděte Taylorův polynom 5**-tého řádu v bodě 0 pro funkci** $\cos(\sin x)$**.**

4. Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$$

5. Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \log\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right]$$

2. Primitivní funkce

Značení. Nechť I je interval a $n \in \mathbb{N}$. Budeme používat značení

$$\mathcal{C}(I) := \{f : I \to \mathbb{R};\ f \text{ je spojitá na } I\};$$
$$\mathcal{C}^n(I) := \{f : I \to \mathbb{R};\ f \text{ má spojitou } n\text{-tou derivaci na } I\}.$$

Symbol $f \in \mathcal{C}([a,b])$ znamená, že interval $[a,b]$ je omezený a funkce f je na tomto intervalu spojitá.

2.1. Základní vlastnosti

Definice. Nechť funkce f je definovaná na neprázdném otevřeném intervalu I. Řekneme, že funkce F je **primitivní funkcí k f na** I, jestliže pro každé $x \in I$ existuje $F'(x)$ a platí $F'(x) = f(x)$.

Věta 2.1 (vlastnosti primitivní funkce)**.** *Nechť funkce F je primitivní funkce k funkci f na neprázdném otevřeném intervalu I. Pak:*

(a) F je spojitá na I.

(b) Pro každé $c \in \mathbb{R}$ je $F + c$ primitivní funkce k f na I.

(c) Pokud G je primitivní funkce k f na I, pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro každé $x \in I$.

Věta 2.2 (vztah spojitosti a existence primitivní funkce)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval a $f \in \mathcal{C}(I)$. Pak f má na I primitivní funkci.*

Věta 2.3 (Darbouxova vlastnost derivace)**.** *Nechť funkce f má na neprázdném otevřeném intervalu I primitivní funkci. Pak má f na I **Darbouxovu vlastnost**, tj. $f(J)$ je interval, kdykoli $J \subset I$ je interval.*

Značení. Fakt, že F je primitivní funkce k f na neprázdném otevřeném intervalu I, značíme symbolem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} F(x), \quad x \in I.$$

Symbol $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ označuje množinu všech primitivních funkcí na k f na I.

Věta 2.4 (linearita primitivní funkce)**.** *Nechť funkce g, f mají na neprázdném otevřeném intervalu I primitivní funkci. Potom pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ je*

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x)\,\mathrm{d}x = \alpha \int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 2.5 (první věta o substituci)**.** *Nechť F je primitivní funkce k f na (a,b). Nechť $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ je funkce, která má v každém bodě $t \in (\alpha,\beta)$ vlastní derivaci. Pak*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt \stackrel{c}{=} F(\varphi(t)), \quad t \in (\alpha,\beta).$$

Věta 2.6 (druhá věta o substituci)**.** *Nechť $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ má v každém bodě nenulovou vlastní derivaci a $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$. Nechť f je funkce definovaná na intervalu (a,b) a platí*

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \stackrel{c}{=} G(t), \quad t \in (\alpha,\beta).$$

Pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \stackrel{c}{=} G(\varphi^{-1}(x)), \quad x \in (a,b).$$

Věta 2.7 (integrace per partes)**.** *Nechť I je neprázdný otevřený interval a $f, g \in \mathcal{C}(I)$. Nechť F je primitivní funkce k f na I a G je primitivní funkce ke g na I. Pak platí*

$$\int g(x)F(x)\,\mathrm{d}x = G(x)F(x) - \int G(x)f(x)\,\mathrm{d}x, \quad x \in I.$$

Věta 2.8 (lepení)**.** *Nechť funkce f je spojitá na intervalu (a,b), $c \in (a,b)$ a F je funkce spojitá v bodě c, splňující $F'(x) = f(x)$ pro $x \in (a,b) \setminus \{c\}$. Pak F je primitivní k f na (a,b).*

2.2. Integrace racionálních funkcí

Definice. **Racionální funkcí** rozumíme podíl dvou polynomů, kde polynom ve jmenovateli není identicky roven nule. Racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ je definovaná na libovolné podmnožině $\mathbb{R}$, která neobsahuje žádný kořen polynomu Q.

Věta 2.9 (rozklad na parciální zlomky)**.** *Nechť P, Q jsou polynomy s reálnými koeficienty takové, že*

(i) $\operatorname{st} P < \operatorname{st} Q$,

(ii) $Q(x) = a_n(x-x_1)^{p_1} \dots (x-x_k)^{p_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1} \dots (x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}$,

(iii) a_n, $x_1, \dots, x_k$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l, \beta_1, \dots, \beta_l \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(iv) $p_1, \dots, p_k$, $q_1, \dots, q_l \in \mathbb{N}$,

(v) žádný z mnohočlenů $x^2+\alpha_1 x+\beta_1, \dots, x^2+\alpha_l x+\beta_l$ *nemá reálný kořen,*

(vi) žádné dva z mnohočlenů $x-x_1$, $x-x_2, \dots, x-x_k$, *nemají společný kořen.*

Pak existují jednoznačně určená čísla $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1$, $\dots, A_1^k, \dots, A_{p_k}^k$, B_1^1, $C_1^1, \dots$, $B_{q_1}^1$, $C_{q_1}^1, \dots$, B_1^l, $C_1^l, \dots, B_{q_l}^l$, $C_{q_l}^l$ *taková, že platí*

$$
\begin{aligned}
\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1^1}{x-x_1} + \dots + \frac{A_{p_1}^1}{(x-x_1)^{p_1}} \\
&+ \dots + \frac{A_1^k}{x-x_k} + \dots + \frac{A_{p_k}^k}{(x-x_k)^{p_k}} \\
&+ \frac{B_1^1 x + C_1^1}{x^2+\alpha_1 x+\beta_1} + \dots + \frac{B_{q_1}^1 x + C_{q_1}^1}{(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{q_1}} + \dots \\
&+ \frac{B_1^l x + C_1^l}{x^2+\alpha_l x+\beta_l} + \dots + \frac{B_{q_l}^l x + C_{q_l}^l}{(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{q_l}}
\end{aligned}
$$

pro všechna $x \in \mathbb{R}$ *splňující* $Q(x) \neq 0$.

Poznámka (postup při integraci racionální funkce)**.** Nechť je zadána racionální funkce $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, kde P a Q jsou polynomy, $Q \not\equiv 0$. Při výpočtu primitivní funkce $\int R(x)\,\mathrm{d}x$ na libovolném intervalu I, který neobsahuje žádný z kořenů polynomu Q, pak postupujeme podle následující osnovy:

1. krok: vyjádříme funkci $R(x)$ ve tvaru $R(x) = P_1(x) + \frac{P_2(x)}{Q(x)}$, kde $\operatorname{st} P_2 < \operatorname{st} Q$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \neq 0$;
2. krok: provedeme rozklad funkce $\frac{P_2(x)}{Q(x)}$ na parciální zlomky podle Věty 2.9;
3. krok: integrujeme jednotlivé parciální zlomky podle následujícího návodu.

(a) Je-li

$$I = \int \frac{A}{(x-a)^n}\,\mathrm{d}x,$$

kde $A \in \mathbb{R}$ a $n \in \mathbb{N}$, pak

$$I \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{1-n}\frac{A}{(x-a)^{n-1}}, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty), \text{ je-li } n > 1; \\ A \log|x-a|, & x \in (-\infty, a) \text{ nebo } x \in (a, \infty), \text{ je-li } n = 1. \end{cases}$$

(b) Je-li

$$I = \int \frac{Bx + C}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x,$$

kde $q \in \mathbb{N}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ a $\beta - \frac{1}{4}\alpha^2 > 0$, pak nejprve vyjádříme I ve tvaru

$$I = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x + (C - \frac{B\alpha}{2})\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x.$$

Označíme-li
$$I_1 = \int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad I_2 = \int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^q}\,\mathrm{d}x,$$
potom
$$I_1 \stackrel{c}{=} \begin{cases} \frac{1}{(1-q)(x^2+\alpha x+\beta)^{q-1}}, & x \in \mathbb{R},\ \text{je-li } q > 1, \\ \log(x^2+\alpha x+\beta), & x \in \mathbb{R},\ \text{je-li } q = 1. \end{cases}$$
Dále platí
$$I_2 = \int \frac{1}{((x+\frac{\alpha}{2})^2+\beta-\frac{\alpha^2}{4})^q}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(\beta-\frac{\alpha^2}{4})^q}\int \frac{1}{\left[\left(\frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\right)^2+1\right]^q}\,\mathrm{d}x.$$

Pro výpočet posledního integrálu využijeme první větu o substituci. Položíme $\varphi(x) = \frac{2x+\alpha}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}$, takže $\varphi'(x) = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}$, a obdržíme
$$\int \frac{1}{\left[\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2+1\right]^q}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{4\beta-\alpha^2}}\int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy.$$

Pro integrál $\int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy$ je k dispozici rekurentní vzorec získaný integrací per partes:
$$\int \frac{1}{(y^2+1)^1}\,dy \stackrel{c}{=} \operatorname{arctg}(y),$$
$$\int \frac{1}{(y^2+1)^{q+1}}\,dy = \frac{y}{2q(y^2+1)^q} + \frac{2q-1}{2q}\int \frac{1}{(y^2+1)^q}\,dy, \qquad q > 1.$$

2.3. Některé užitečné substituce

Poznámka (racionalisace integrálů s exponenciálou a s logaritmem)**.** Ať R je racionální funkce.

(a) Pro převod integrálů tvaru $\int R(e^{at})\,dt$ (kde $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$) na integraci racionální funkce lze využít substituci $\varphi(t) = e^{at}$.

(b) Pro převod integrálů tvaru $\int \frac{R(\log t)}{t}\,dt$ na integraci racionální funkce lze využít substituci $\varphi(t) = \log t$.

Značení. Ve zbytku této kapitoly budeme symbolem $R(x,y)$ značit **racionální funkci dvou proměnných**, tj. $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, kde
$$P(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N_1} a_{ij}x^i y^j, \quad Q(x,y) = \sum_{i,j=0}^{N_2} b_{ij}x^i y^j.$$

Poznámka (racionalisace trigonometrických integrálů)**.** Pro převod integrálů tvaru $\int R(\sin t,\cos t)\,dt$ na integraci racionální funkce lze využít jedné z následujících substitucí:

(a) vždy lze užít substituci $\varphi(t) = \operatorname{tg}(\frac{t}{2})$, $t \in (-\pi,\pi)$,
(b) pokud $R(a,-b) = -R(a,b)$, lze užít substituci $\varphi(t) = \sin t$, $t \in \mathbb{R}$,
(c) pokud $R(-a,b) = -R(a,b)$, pak lze užít substituci $\varphi(t) = \cos t$, $t \in \mathbb{R}$,
(d) pokud $R(-a,-b) = R(a,b)$, pak lze užít substituci $\varphi(t) = \operatorname{tg} t$, $t \in (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

Poznámka (racionalisace integrálů s odmocninou)**.** Nechť $q \in \mathbb{N}$, $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad \neq bc$. Potom pro převod integrálů tvaru $\int R(t,(\frac{at+b}{ct+d})^{\frac{1}{q}})\,\mathrm{d}t$, na integraci racionální funkce lze využít substituci $\varphi(t) = (\frac{at+b}{ct+d})^{\frac{1}{q}}$.

Poznámka (racionalisace integrálů tvaru $\int R(t,\sqrt{at^2+bt+c})\,\mathrm{d}t$)**.** Nechť $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Potom pro převod integrálů tvaru $\int R(t,\sqrt{at^2+bt+c})\,\mathrm{d}x$ na integraci racionální funkce rozlišujeme následující případy:

(a) Nechť má trojčlen $at^2 + bt + c$ dvojnásobný reálný kořen α a platí $at^2 + bt + c = a(t - \alpha)^2$. Má-li mít úloha smysl, musí platit $a > 0$. Pak ale

$$\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}|t - \alpha|.$$

(b) Nechť má trojčlen $at^2 + bt + c$ dva různé reálné kořeny α_1, α_2, $\alpha_1 < \alpha_2$ a platí $at^2 + bt + c = a(t - \alpha_1)(t - \alpha_2)$. Je-li $a > 0$, pak pro $t \in (-\infty, \alpha_1)$ a $t \in (\alpha_2, \infty)$ platí

$$\begin{aligned}\sqrt{at^2 + bt + c} &= \sqrt{a(t - \alpha_1)(t - \alpha_2)} \\ &= \sqrt{a}|t - \alpha_1|\sqrt{\frac{t - \alpha_2}{t - \alpha_1}}.\end{aligned}$$

Je-li $a < 0$, pak pro $t \in (\alpha_1, \alpha_2)$ platí

$$\begin{aligned}\sqrt{at^2 + bt + c} &= \sqrt{(-a)(t - \alpha_1)(\alpha_2 - t)} \\ &= \sqrt{-a}(t - \alpha_1)\sqrt{\frac{\alpha_2 - t}{t - \alpha_1}}.\end{aligned}$$

V obou případech jsme tedy zadání převedli na úlohu nalézt primitivní funkci $\int R(t, (\frac{at+b}{ct+d})^{\frac{1}{q}})\,\mathrm{d}t$, jejiž řešení již známe. Povšimněme si, že v obou případech je splněna podmínka $ad \neq bc$, neboť v prvním případě platí $ad = -\alpha_1$ a $bc = -\alpha_2$, zatímco ve druhém případě platí $ad = \alpha_1$ a $bc = \alpha_2$.

(c) Polynom $at^2 + bt + c$ nemá reálné kořeny. Má-li mít úloha smysl, musí platit $a > 0$ a $c > 0$. V tomto případě lze užít jednu z takzvaných **Eulerových substitucí**

$$\sqrt{at^2 + bt + c} = \sqrt{a}t + x \quad \text{nebo} \quad \sqrt{at^2 + bt + c} = tx + \sqrt{c}.$$

3. Newtonův a Riemannův integrál

3.1. Newtonův integrál

Definice. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Řekneme, že **Newtonův integrál z funkce** f **na intervalu** (a, b) **existuje**, jestliže

- f má na (a, b) primitivní funkci (označme ji F),
- existují limity $\lim_{x\to a_+} F(x)$ a $\lim_{x\to b_-} F(x)$ (nikoli nutně vlastní);
- rozdíl těchto dvou limit je definován jako prvek množiny $\mathbb{R}^*$.

Hodnotou Newtonova integrálu z funkce f na intervalu (a, b) pak rozumíme prvek

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{x\to b_-} F(x) - \lim_{x\to a_+} F(x).$$

Pokud $a > b$, pak klademe $(N)\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$. Pro $a \in \mathbb{R}^*$ definujeme $(N)\int_a^a f(x)\,dx = 0$. Jestliže $(N)\int_a^b f(x)\,dx$ existuje vlastní, pak říkáme, že integrál je **konvergentní**. Není-li integrál konvergentní, říkáme, že je **divergentní**.

Poznámka. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, a nechť f je funkce definovaná na intervalu (a, b). Pak nastává právě jedna z následujících možností:

$$(N)\int_a^b f(x)\,dx \begin{cases} \text{neexistuje,} \\ \text{existuje} \begin{cases} = \infty, \\ = -\infty, \\ \in \mathbb{R}. \end{cases} \end{cases}$$

Značení. Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. Množinu všech funkcí $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, které mají na intervalu (a, b) konvergentní Newtonův integrál, značíme symbolem $\mathcal{N}(a, b)$.

Úmluva. Je-li $(a, b) \subset D(f)$, pak symbol $f \in \mathcal{N}(a, b)$ znamená $f|_{(a,b)} \in \mathcal{N}(a, b)$.

Značení. Nechť funkce F je definovaná na (a, b) a existují (vlastní nebo nevlastní) jednostranné limity $\lim_{x\to a+} F(x)$ a $\lim_{x\to b-} F(x)$. Potom budeme značit $F(a+) = \lim_{x\to a+} F(x)$, $F(b-) = \lim_{x\to b-} F(x)$ a $[F]_a^b = F(b-) - F(a+)$, pokud má rozdíl smysl. Budeme občas psát $\int$ místo $(N)\int$.

Příklad.

$$(N)\int_0^1 x^\alpha\,dx = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-1, \infty) \quad \text{(konverguje)}, \\ [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_0^1 = \infty, & \alpha \in (-\infty, -1) \quad \text{(diverguje)}, \\ [\log x]_0^1 = \infty, & \alpha = -1 \quad \text{(diverguje)}. \end{cases}$$

$$(N)\int_1^\infty x^\alpha\,dx = \begin{cases} [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_1^\infty = \infty, & \alpha \in (-1, \infty) \quad \text{(diverguje)}, \\ [\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}]_1^\infty = \frac{-1}{\alpha+1}, & \alpha \in (-\infty, -1) \quad \text{(konverguje)}, \\ [\log x]_1^\infty = \infty, & \alpha = -1 \quad \text{(diverguje)}. \end{cases}$$

Značení. Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f$ místo $(N)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Věta 3.1 (vlastnosti Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$.*

(a) *Pro $\alpha \in \mathbb{R}$ platí následující rovnosti, pokud pravé strany rovností mají smysl*

$$\int_a^b f + g = \int_a^b f + \int_a^b g, \qquad \int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f.$$

(b) *Jestliže $f, g \in \mathcal{N}(a, b)$ a $f \le g$, pak $\int_a^b f \le \int_a^b g$.*

(c) *Jestliže $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{C}((a, b))$, pak $\int_a^b |f|$ existuje a $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.*

(d) *Nechť* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < b < c$. *Jestliže* $f \in \mathcal{N}(a, c)$, *pak* $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{N}(b, c)$ *a platí*

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f.$$

(e) *Nechť* $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, $a < b < c$. *Nechť* f *je spojitá v* b. *Pak* $f \in \mathcal{N}(a, b) \cap \mathcal{N}(b, c) \Leftrightarrow f \in \mathcal{N}(a, c)$.

(f) *Ať* $f \in \mathcal{N}(a, b)$. *Ať* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ *jsou posloupnosti z* (a, b) *splňující* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. *Pak*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f.$$

(g) *Ať* $f \in \mathcal{N}(a, b)$ *a* $m \leq f(x) \leq M$ *pro* $x \in [a, b]$. *Pak*

$$m(b - a) \leq \int_a^b f \leq M(b - a).$$

(h) *Ať* $f \in \mathcal{N}(a, b)$, $c \in (a, b)$. *Pak* $(x \mapsto \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t)' = f(x)$ *pro* $x \in (c, b)$.

Věta 3.2 (per partes pro Newtonův integrál)**.** *Nechť* $a, b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$, *a nechť* f *a* g *jsou funkce definované na* (a, b). *Nechť* F *je primitivní funkce k funkci* f *na* (a, b) *a* G *je primitivní funkce k funkci* g *na* (a, b). *Potom platí*

$$\int_a^b Fg = [FG]_a^b - \int_a^b fG,$$

jestliže má pravá strana smysl.

Věta 3.3 (substituce pro Newtonův integrál)**.** *Nechť* $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $a < b$ *a* $\alpha < \beta$. *Nechť* f *je funkce definovaná na* (a, b) *a nechť* φ *je funkce definovaná na* (α, β). *Nechť* φ *má vlastní nenulovou derivaci na* (α, β) *a nechť platí* $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. *Potom*

$$\int_a^b f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)\,|\varphi'|\,,$$

má-li alespoň jedna strana smysl.

3.2. Riemannův integrál

Definice. Konečnou posloupnost $\{x_j\}_{j=0}^n$ nazýváme **dělením intervalu** $[a, b]$, jestliže platí

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b.$$

Body $x_0, \ldots, x_n$ nazýváme **dělícími body**. **Normou dělení** $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ rozumíme číslo

$$\nu(D) = \max\{x_j - x_{j-1};\ j = 1, \ldots, n\}.$$

Definice. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a, b]$ a $D = \{x_j\}_{j=0}^n$ je dělení $[a, b]$. Označme

$$\overline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^n M_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } M_j = \sup\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\underline{S}(f, D) = \sum_{j=1}^n m_j(x_j - x_{j-1}),\ \text{kde } m_j = \inf\{f(x); x \in [x_{j-1}, x_j]\},$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \inf\{\overline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\},$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \sup\{\underline{S}(f, D);\ D \text{ je dělením intervalu } [a, b]\}.$$

Definice. Řekneme, že omezená funkce f na intervalu $[a,b]$, $a<b$, má **Riemannův integrál od** a **do** b, pokud $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Hodnota integrálu f od a do b je rovna této společné hodnotě. Značíme ji $(R)\int_a^b f$. Nemůže-li dojít ke zmatení, píšeme $\int_a^b f$ místo $(R)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Jestliže $a>b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$. V případě, že $a=b$, definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Poznámka. Nechť f je omezená funkce definovaná na intervalu $[a,b]$, která má Riemannův integrál od a do b. Pak hodnotu integrálu můžeme určit následujícím způsobem.

- pro každé $n\in\mathbb{N}$ zvolíme dělení $D_n = \{x_{n,k}\}_{k=1}^{k_n}$ tak, že $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(D_n) = 0$;
- pro každé $n\in\mathbb{N}$ a $i\in\{1,\dots k_n\}$ zvolíme $c_{n,i}\in[x_{n,i-1},x_{n,i}]$;

Pak $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k_n} f(c_{n,i})(x_{n,i}-x_{n,i-1}) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Definice. Nechť $a,b\in\mathbb{R}$. Množinu všech funkcí, které mají Riemannův integrál od a do b, značíme $\mathcal{R}([a,b])$. Pokud $[a,b]\subset D(f)$, potom symbol $f\in\mathcal{R}([a,b])$ znamená, že $f|_{[a,b]}\in\mathcal{R}([a,b])$.

Příklady. (a) Existuje funkce, která je Riemannovsky integrovatelná, ale není Newtonovsky integrovatelná (například $|\operatorname{sgn} x|$ na intervalu $[-1,1]$).

(b) Existuje funkce, která je Newtonovsky integrovatelná, ale není Riemannovsky integrovatelná (například $\frac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $(0,1)$ dodefinovaná libovolnou hodnotou v bodě 0).

Věta 3.4 (spojitost a riemannův integrál)**.** *Nechť $f\in\mathcal{C}([a,b])$. Potom $f\in\mathcal{R}([a,b])$.*

Věta 3.5 (vztah Riemannova a Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, a nechť $f\in\mathcal{R}([a,b])\cap\mathcal{N}(a,b)$. Potom*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Důsledek 3.6 (spojitost a existence Riemannova a Newtonova integrálu)**.** *Nechť $f\in\mathcal{C}([a,b])$. Potom $f\in\mathcal{R}([a,b])\cap\mathcal{N}(a,b)$ a*

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (N)\int_a^b f(x)\,dx.$$

3.3. Konvergence Newtonova integrálu

Věta 3.7 (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro funkce)**.** *Nechť $a\in\mathbb{R}^*$ a nechť $\delta_0>0$. Nechť funkce f je definována na $P(a,\delta_0)$. Potom existuje vlastní $\lim_{x\to a} f(x)$ právě tehdy, když je splněna následující* **Bolzanova–Cauchyova podmínka***:*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in P(a,\delta)\colon |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

Důsledek 3.8 (Bolzanova-Cauchyova podmínka pro integrál)**.** *Nechť $f\in\mathcal{C}([a,b))$. Pak $f\in\mathcal{N}(a,b)$ právě tehdy, když platí*

$$\forall\varepsilon>0\ \exists b'\in(a,b)\ \forall x_1,x_2\in(b',b):\left|\int_{x_1}^{x_2} f\right|<\varepsilon.$$

Poznámka. Tvrzení Důsledku 3.8 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a,b]$.

Věta 3.9 (vztah spojitosti a konvergence Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a,b\in\mathbb{R}$ a $f\in\mathcal{C}((a,b))$ je omezená. Potom $f\in\mathcal{N}(a,b)$.*

Věta 3.10 (srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*$ a nechť $a<b$. Nechť funkce $f,g:[a,b)\to\mathbb{R}$ splňují $0\le f(x)\le g(x)$ pro každé $x\in[a,b)$. Nechť je $f\in\mathcal{C}([a,b))$ a $g\in\mathcal{N}(a,b)$. Potom $f\in\mathcal{N}(a,b)$.*

Věta 3.11 (limitní srovnávací kritérium pro konvergenci Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}^*$, $a<b$. Nechť f,g jsou spojité nezáporné funkce na $[a,b)$. Jestliže $\lim_{x\to b_-}\frac{f(x)}{g(x)}\in(0,\infty)$, pak $f\in\mathcal{N}(a,b)$ právě tehdy, když $g\in\mathcal{N}(a,b)$.*

Věta 3.12 (vztah absolutní konvergence a konvergence Newtonova integrálu)**.** *Nechť $a,b\in\mathbb{R}^*$, $a<b$, a nechť je dána funkce $f\in\mathcal{C}((a,b))$ splňující $|f|\in\mathcal{N}(a,b)$. Potom $f\in\mathcal{N}(a,b)$.*

Poznámka. Tvrzení Vět 3.10 a 3.11 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$.

Věta 3.13 (Abelovo-Dirichletovo kritérium konvergence Newtonova integrálu)**.** *Nechť* $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$, $a < b$. *Nechť* $f, g \in \mathcal{C}([a, b))$ *a* g *je monotónní na* $[a, b)$. *Nechť* F *je primitivní funkce k funkci* f *na* (a, b).

(a) *Jestliže* $f \in \mathcal{N}(a, b)$ *a* g *je omezená na* $[a, b)$, *potom* $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

(b) *Jestliže* F *je omezená na* (a, b) *a* $\lim_{x \to b_-} g(x) = 0$, *potom* $fg \in \mathcal{N}(a, b)$.

Poznámka. Tvrzení Věty 3.13 platí s příslušnými úpravami i pro intervaly typu $(a, b]$.

4. Použití určitého integrálu

4.1. Aplikace v matematické analýze

Věta 4.1 (integrální kritérium konvergence řad)**.** *Nechť $n_0 \in \mathbb{N}$ a $f \in \mathcal{C}([n_0, +\infty))$ je nezáporná a nerostoucí. Pak $\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje právě tehdy, když $\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n)$ konverguje.*

4.2. Použití v geometrii

4.2.1 Obsah rovinných obrazců

(a) **Obsah podgrafu spojité funkce**
Nechť $f \in \mathcal{C}([a,b])$, $f \geq 0$. Pak obsah podgrafu f je roven číslu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Přesněji,

$$\text{obsah}\Big(\big\{(x,y);\ x \in [a,b], 0 \leq y \leq f(x)\big\}\Big) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) **Obsah množiny vytvořené grafy funkcí**
Nechť $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$. Pak obsah množiny bodů ležících mezi grafy funkcí f a g je roven číslu $\int_a^b |g(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x$. Přesněji,

$$\text{obsah}\Big(\big\{(x,y);\ x \in [a,b], f(x) \leq y \leq g(x) \text{ nebo } g(x) \leq y \leq f(x)\big\}\Big) = \int_a^b |g(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Příklad. Vypočtěte obsah plochy ohraničené grafy funkcí $f(x) = x^2$ a $g(x) = \sqrt{x}$ pro $x \in [0,1]$
Řešení: $\frac{1}{3}$

(c) **Obsah množiny vytvořené parametricky zadanými křivkami**
Mějme parametricky zadanou křivku funkcemi $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ na intervalu $[a,b]$. Pak integrál

$$\Big|\int_a^b \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|$$

vyjadřuje obsah množiny bodů ležících pod křivkou.

Přesněji, nechť $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([a,b])$, $\psi \geq 0$ a nechť funkce φ má vlastní nenulovou derivaci v každém bodě (a,b). Pak

$$\text{obsah}\Big(\big\{(\varphi(t), y);\ 0 \leq y \leq \psi(t), t \in [a,b]\big\}\Big) = \Big|\int_a^b \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big| = \int_a^b \psi(t)|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Příklad. Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného osou x a křivkou zadanou parametrickými rovnicemi $x = 2\sin t$, $y = 2\cos t$, $t \in [0, \pi]$.
Řešení: 2π

4.2.2 Objem těles

(a) **Objem rotačního tělesa**
Nechť $f \in \mathcal{C}([a,b])$ a těleso vzniklo rotací grafu funkce f na intervalu (a,b) kolem osy x. Pak jeho objem je dán vzorcem

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Přesněji,

$$\text{objem}\left(\left\{(x,y,z);\ x \in [a,b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq |f(x)|\right\}\right) = \pi \int_a^b f(x)^2\,\mathrm{d}x.$$

Příklad. Vypočtěte objem rotačního tělesa vzniklého rotací grafu funkce $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ na intervalu $[-3, 3]$ kolem osy x.
Řešení: 36π

Příklad. Vypočtěte objem kužele o poloměru podstavy 2 a výšce 3.
Řešení: 4π *(rotace funkce* $f(x) = \frac{2}{3}x$*)*

Je-li graf funkce zadán parametricky ($x = \varphi(t), y = \psi(t),\ t \in [a, b]$*), použije se vzorec*

$$\pi\Big|\int_a^b \psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|.$$

Přesněji, nechť $\varphi, \psi \in \mathcal{C}([a, b])$ a funkce φ má vlastní nenulovou derivaci v každém bodě (a, b), pak

$$\text{objem}\left(\Big\{(\varphi(t), y, z);\ t \in [a, b],\ \sqrt{y^2 + z^2} \leq |\psi(t)|\Big\}\right) = \pi\Big|\int_a^b \psi^2(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\Big|.$$

Příklad. Vypočtěte objem koule o poloměru $r > 0$.
Řešení: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(dvakrát rotace grafu* $x(t) = r\sin t,\ y = r\cos t,\ t \in [0, \pi/2]$*)*

4.2.3 Délka křivek

Definice. Nechť $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. **Křivkou** budeme rozumět zobrazení $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ takové, že $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ je **třídy** $\mathcal{C}^1$, tj. $\varphi_i' \in \mathcal{C}^1([a, b])$ pro $i = 1, \ldots, n$.

Definice. Pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ definujeme **vzdálenost mezi** x **a** y jako $\|x - y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$.

Definice. Nechť $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$ je křivka. **Délkou křivky** φ rozumíme hodnotu

$$L(\varphi) = \sup\{L(\varphi, D);\ D \text{ je dělení intervalu } [a, b]\},$$

kde pro dělení $D = \{x_j\}_{j=0}^k$ intervalu $[a, b]$ definujeme

$$L(\varphi, D) = \sum_{j=1}^k \|\varphi(x_{j-1}) - \varphi(x_j)\|.$$

Věta 4.2 (délka křivky)**.** *Nechť* $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ *je křivka. Potom platí*

$$L(\varphi) = \int_a^b \sqrt{\varphi_1'(t)^2 + \cdots + \varphi_n'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Poznámky.

- Pokud $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, pak dostáváme

  $$\text{délka grafu funkce } f = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

  Příklad. Spočtěte délku křivky $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}, x \in (-1, 1)$.
  Řešení: 4

- Pokud je křivka zadaná polárně, tj. $x = r(t)\cos t$, $y = r(t)\sin t$ pro $t \in (\alpha, \beta)$ a $r \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta])$, pak délka křivky se spočte jako

  $$\int\limits_\alpha^\beta \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

  Příklad. Odvoďte vztah pro délku kružnice.
  Řešení: $2\pi R$ *(délka křivky* $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ t \in (0, 2\pi)$*)*

4.2.4 Povrch rotačního tělesa

Definovat povrch tělesa je poměrně složité a v tomto kursu to dělat nebudeme. Heuristické úvahy nás mohou dovést k tomu, jaký vzorec by měl platit pro povrch rotačních těles. Tento vzorec v tomto kursu použijeme jako definici.

Definice (povrch pláště rotačního tělesa)**.** Nechť $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$. Označme $T = \{(x,y,z);\ x \in [a,b],\ \sqrt{y^2+z^2} \le |f(x)|\}$. Pak

$$\text{povrch pláště}\,(T) := 2\pi \int_a^b |f(x)|\sqrt{1+(f'(x))^2}\,\mathrm{d}x.$$

Příklad. Nalezněte povrch rotačního tělesa vzniklého rotací křivky $y = x^3$, $|x| \le 1$ kolem osy x.
Řešení: $\frac{2}{27}\pi(10^{3/2}-1)$

Definice (povrch pláště rotačního tělesa parametricky zadané funkce)**.** Nechť $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1([a,b])$ a derivace funkce φ je nenulová na $[a,b]$. Pak

$$\text{povrch pláště}\left(\left\{(\varphi(t),y,z);\ t\in[a,b],\ \sqrt{y^2+z^2}\le|\psi(t)|\right\}\right) := 2\pi\int_a^b |\psi(t)|\sqrt{\varphi'(t)^2+\psi'(t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Poznámka. Pokud je křivka zadaná polárně, tj. $x = r(t)\cos t$, $y = r(t)\sin t$ pro $t \in (\alpha,\beta) \subset (0,2\pi)$ a $r \in \mathcal{C}^1([\alpha,\beta])$, pak se povrch pláště tělesa $\{(r(t)\cos t, y, z);\ t \in [a,b],\ \sqrt{y^2+z^2} \le |r(t)\sin t|\}$ spočte jako

$$2\pi\int_\alpha^\beta |r(t)\sin(t)|\sqrt{r(t)^2+r'(t)^2}\,\mathrm{d}t\,.$$

Příklad. Odvoďte vztah pro povrch koule.
Řešení: $4\pi R^2$ *(dvakrát* $x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ t \in (0,\pi/2)$*)*

4.3. Použití ve fyzice

4.3.1 Pohyb

Jestliže se bod pohybuje po přímce (např. po ose x) a značí-li $s(t)$ souřadnici bodu v čase t, je $s'(t)$ okamžitá rychlost $v(t)$ v čase t a $v'(t) = s''(t)$ okamžité zrychlení v čase t.

Změna polohy a ujetá vzdálenost

Je-li dána závislost rychlosti na čase funkcí $v(t)$, není

$$\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t = s(b) - s(a)$$

ujetá vzdálenost, ale změna polohy pohybujícího se bodu. Ujetá délka cesty od okamžiku $t = a$ do okamžiku $t = b$ se spočte jako

$$\int_a^b |v(t)|\,\mathrm{d}t\,.$$

Příklad. Vypočítejte dráhu dešťové kapky za prvních 6 sekund, kde okamžitá rychlost (v metrech za sekundu) kapky je dána vzorcem $v(t) = g.t$, kde $g = 9.81$.
Řešení: 176.58 *metrů (*$176.58 = 9.81 \cdot 18$*)*

4.3.2 Těžiště desky

Hmotnost desky

Je-li deska množinou bodů ležících mezi grafy dvou funkcí ($\{(x,y); x \in (a,b), g(x) \le y \le f(x)\}$) a hustota je dána funkcí $h(x,y)$, pak hmotnost M je dána vzorcem

$$M = \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} h(x,y)\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Momenty desky

Máme–li desku jako výše, pak momenty desky M_x, M_y vzhledem k osám x, y jsou dány vzorcem

$$M_x = \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} yh(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x\,, \quad M_y = \int_a^b \Big(\int_{g(x)}^{f(x)} xh(x,y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x\,.$$

Těžiště desky

Těžiště (T_x, T_y) desky s hmotností M a s momenty (M_x, M_y) je dáno vzorcem

$$T_x := \frac{M_y}{M}, \qquad T_y := \frac{M_x}{M}.$$

Příklad. Vypočtěte souřadnice těžiště rovinného útvaru konstantní hustoty, který je ohraničen grafy funkcí $f(x) = 4x^2$ a $g(x) = 0$, $x \in [0,4]$.
Řešení: $T = (3, \frac{96}{5})$

4.3.3 Práce

Nechť ve směru osy x působí síla velikosti $F(x)$ v bodě x. Celková práce vykonaná na intervalu $[a,b]$ působením této síly je dána vzorcem

$$W = \int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Příklad. Přímočarý pohyb tělesa je daný funkcí $s = t^3$, kde $s(t)$ je délka dráhy za čas t. Velikost odporové síly prostředí je $F_o(v) = 2v^2$. Vypočítejte práci, kterou vykonají odporové síly, pokud těleso projde dráhu od $s = 0$ do $s = 8$.
Návod: Platí, že $v(t) = s'(t) = 3t^2$, a tedy $F_o(v(t)) = 18t^4$. Těleso se pohybuje od času $t_1 = 0$ do času $t_2 = 2$. Práce odporových sil je $W = \int_0^8 F(s)\,\mathrm{d}s = \int_0^2 F(s(t))s'(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^2 18t^4 \cdot 3t^2\,\mathrm{d}t = \frac{54}{7}[t^7]_0^2 = 2^7\frac{54}{7}$.

4.4. Použití v ekonomii

4.4.1 Celkový příjem

Pokud je renta (zisk z dodatečné jednotky) dána funkcí $f(t)$, pak celkový příjem za období (t_1, t_2) je určen vzorcem

$$TR = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Příklad. Výška renty je dána funkcí $f(t) = 100e^{-t}$, kde symbolem t označujeme roky. Vypočtěte celkový příjem za období od druhého do pátého roku.
Řešení: $TR = \int_2^5 100e^{-t}\,\mathrm{d}t = 100e^{-2} - 100e^{-5} \simeq 13.$

5. Diferenciální rovnice

Definice. **Diferenciální rovnicí** rozumíme rovnici tvaru

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0\,, \tag{5.1}$$

kde F je reálná funkce $n+2$ proměnných. **Řád diferenciální rovnice** (5.1) je nejvyšší řád derivace funkce y vyskytující se v (5.1).

Řešením diferenciální rovnice (5.1) rozumíme funkci y definovanou na nějakém neprázdném otevřeném intervalu I, která má v každém bodě intervalu I vlastní n-tou derivaci a jejíž hodnoty spolu s hodnotami derivací splňují rovnici (5.1) v každém bodě intervalu I, tj. pro každé $x \in I$ platí

$$F\Big(x, y(x), y'(x), y''(x), ..., y^{(n)}(x)\Big) = 0.$$

Definice. Je-li funkce y řešením rovnice (5.1) na intervalu I a funkce $\tilde{y}$ řešením rovnice (5.1) na intervalu $\tilde{I}$, kde $I \subset \tilde{I}$, $I \neq \tilde{I}$ a $y(x) = \tilde{y}(x)$ pro všechna $x \in I$, pak říkáme, že řešení $\tilde{y}$ je **prodloužením řešení** y na interval $\tilde{I}$.

Řešení rovnice (5.1), které nemá prodloužení, nazýváme **maximálním řešením** rovnice (5.1). **Obecným řešením** rozumíme množinu všech maximálmích řešení. Maximálnímu řešení někdy také říkáme **partikulární řešení**.

Definice. Rovnice tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', ..., y^{(n-1)}),$$

kde f je reálná funkce $n+1$ proměnných, se nazývá **diferenciální rovnice (n-tého řádu) vyřešená vzhledem k nejvyšší derivaci**.

5.1. Obyčejné diferenciální rovnice prvního řádu

Rovnice se separovanými proměnnými

Definice (Rovnice se separovanými proměnnými)**. Diferenciální rovnice se separovanými proměnnými** je rovnice tvaru

$$y' = g(y)h(x). \tag{5.2}$$

Metoda řešení pro g, h spojité na svých definičních oborech.

(a) Určíme maximální otevřené intervaly obsažené v definicním oboru funkce h. (Tím máme vymezeny maximální intervaly, na kterých můžeme hledat řešení.)

(b) Najdeme všechny nulové body funkce g. Je-li $g(c) = 0$, pak na každém intervalu z 1. kroku je funkce $y(x) = c$ tzv. **singulárním** (též **stacionárním**) řešením rovnice (5.2).

(c) Určíme maximální otevřené intervaly, na kterých je funkce g nenulová.

(d) Vezmeme interval I z 1. kroku a interval J ze 3. kroku. Tedy h je na I spojitá a g je na J spojitá a nenulová. Budeme hledat řešení rovnice (5.2), jejichž definiční obor je obsažen v intervalu I a mají hodnoty v intervalu J. Je-li y takové řešení, pak pro každé $x \in D(y)$ platí

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = h(x).$$

Nechť H je primitivní funkce k funkci h na intervalu I a G je primitivní funkce k funkci $1/g$ na J . Potom existuje konstanta $C \in \mathbb{R}$ taková, že platí

$$G(y(x)) = H(x) + C$$

na definičním oboru řešení y, který nalezneme v následujícím kroku.

(e) Nyní zafixujeme C a nalezneme maximální neprázdné otevřené intervaly obsažené v množině

$$\{x \in I;\ H(x) + C \in G(J)\}.$$

Na každém z těchto intervalů řešení musí mít tvar

$$y(x) = G^{-1}(H(x) + C),$$

kde G^{-1} značí funkci inverzní k funkci G. Ta existuje, neboť G je na intervalu J buď rostoucí nebo klesající.

(f) Z řešení nalezených v 5. kroku a singulárních řešení z 2. kroku „slepíme“ všechna maximální řešení rovnice (5.2). Nechť y_1 a y_2 jsou řešení rovnice (5.2), první na intervalu (a, b) a druhé na intervalu (b, c), přicemž $b \in D(h)$. Předpokládejme, že

$$\lim_{x \to b-} y_1(x) = \lim_{x \to b+} y_2(x) = \alpha \in D(g).$$

Pak funkce

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & x \in (a, b); \\ \alpha, & x = b; \\ y_2(x), & x \in (b, c); \end{cases}$$

je řešením rovnice (5.2) na intervalu (a, c).

Homogenní rovnice

Definice (Homogenní rovnice)**. Homogení diferenciální rovnice 1. řádu** se nazývá rovnice tvaru $y' = f(x, y)$, kde pro každé $\lambda \neq 0$ máme $f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$.

Metoda převodu homogenní rovnice na rovnici se separovanými proměnnými.

(a) Definujme pro $x \neq 0$ funkci $z(x) = \frac{y(x)}{x}$. Pak pro $x \neq 0$ máme

$$\begin{aligned} y(x) &= xz(x), \\ y'(x) &= xz'(x) + z(x). \end{aligned}$$

Rovnice tak přechází na $xz' + z = f(x, xz) = f(1, z)$, tj.

$$z' = \frac{1}{x}\left(f(1, z) - z\right),$$

což je rovnice se separovanými proměnnými.

(b) Vyřešíme rovnici se separovanými proměnnými na otevřených podintervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$. Pak položíme $y(x) = x \cdot z(x)$.

(c) Protože jsme na začátku vyloučili případ $x = 0$, je potřeba na závěr ověřit, zda nalezená řešení můžeme prodloužit do počátku.

Lineární rovnice 1. řádu

Definice (Lineární rovnice)**. Lineární diferenciální rovnicí prvního řádu** rozumíme rovnici tvaru

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{5.3}$$

kde p, q jsou funkce definované na intervalu (a, b). Je-li $q = 0$, nazývá se rovnice **homogenní**, v opačném případě **nehomogenní**.

Metoda řešení pro p, q spojité na svých definičních oborech.

(a) Obecné řešení homogenní rovnice je tvořeno funkcemi

$$y(x) = Ke^{-P(x)}, \quad x \in (a, b), K \in \mathbb{R},$$

kde P je primitivní funkce k p na intervalu (a, b).

(b) Obecné řešení rovnice (5.3) je tvořeno funkcemi

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t \right) e^{-P(x)} + K e^{-P(x)}, \quad x \in (a,b), \ K \in \mathbb{R},$$

kde $x_0 \in (a,b)$ a P je primitivní funkce k p na intervalu (a,b).

(c) Maximální řešení rovnice (5.3) splňující **počáteční podmínku** $y(x_0) = y_0$ je

$$y(x) = \left(\int_{x_0}^{x} q(t) e^{P(t)} \, \mathrm{d}t \right) e^{-P(x)} + y_0 e^{-P(x)}, \quad x \in (a,b),$$

kde $P(x_0) = 0$, tj. $P(x) = \int_{x_0}^{x} p(t) \, \mathrm{d}t$.

Poznámka. Pro každé $x_0 \in (a,b)$ a každé $y_0 \in \mathbb{R}$ existuje právě jedno maximální řešení rovnice (5.3), které splňuje podmínku $y(x_0) = y_0$. Toto řešení je navíc definováno na celém (a,b).

5.2. Obyčejné diferenciální rovnice druhého řádu

Lineární rovnice 2. řádu

Definice (Lineární rovnice 2. řádu)**. Lineární diferenciální rovnicí druhého řádu** rozumíme rovnici tvaru

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x), \tag{5.4}$$

kde p, q, r jsou funkce spojité na intervalu (a,b).

Homogenní rovnicí příslušnou k rovnici (5.4) rozumíme rovnici

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{5.5}$$

Věta 5.1 (Existence řešení pro lineární rovnice 2. řádu)**.** *Nechť $t_0 \in (a,b)$ a $z_0, z_1 \in \mathbb{R}$. Pak existuje právě jedno maximální řešení y rovnice* (5.4)*, které splňuje podmínky $y(t_0) = z_0$, $y'(t_0) = z_1$. Navíc, toto řešení je definováno na celém intervalu (a,b).*

Věta 5.2 (Struktura řešení lineární rovnice 2. řádu)**.**

(a) Obecné řešení rovnice (5.5) *tvoří vektorový podprostor prostoru $\mathcal{C}^2((a,b))$ dimenze* 2*.*

(b) Nechť y_p je partikulární řešení rovnice (5.4)*. Pak obecné řešení rovnice* (5.4) *je*

$$\{y_h + y_p;\ y_h \text{ je řešení rovnice (5.5) na intervalu } (a,b)\}.$$

Poznámky.

- Báze prostoru maximálních řešení rovnice (5.5) se nazývá **fundamentální systém řešení** rovnice (5.5).
- Jsou-li funkce y_1, y_2 lineárně nezávislá maximální řešení rovnice (5.5), pak již tvoří fundamentální systém.
- Abychom vyřešili nehomogenní rovnici (5.4), najdeme fundamentální systém y_1, y_2 pro rovnici (5.5) a jedno („partikulární“) řešení y_p rovnice (5.4). Obecné řešení rovnice (5.4) pak je $\{y_p + C_1 y_1 + C_2 y_2;\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}\}$.

Věta 5.3 (Obecné řešení homogenní rovnice)**.** *Nechť y_1, y_2 jsou dvě řešení rovnice* (5.5) *na (a,b). Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(a) Funkce y_1, y_2 jsou lineárně nezávislé;

(b) Tzv. Wronského determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

je nenulový alespoň v jednom bodě intervalu (a,b) (pak je nenulový v každém bodě (a,b)).

Věta 5.4 (variace konstant)**.** *Nechť funkce y_1, y_2 tvoří fundamentální systém řešení rovnice* (5.5)*. Pokud existují funkce c_1, c_2 mající na (a,b) vlastní derivaci a splňující soustavu rovnic*

$$\begin{aligned} c_1' y_1 + c_2' y_2 &= 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' &= r \end{aligned}$$

na intervalu (a,b), pak funkce $y_p(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x)$, $x \in (a,b)$ je řešením rovnice (5.4)*.*

Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty

Definice (Lineární rovnice 2. řádu s konstantními koeficienty)**. Lineární diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty** rozumíme rovnici tvaru

$$y'' + py' + qy = r(x), \tag{5.6}$$

kde $p, q \in \mathbb{R}$ a r je funkce spojitá na intervalu (a, b).

Homogenní rovnicí příslušnou k rovnici (5.6) rozumíme rovnici

$$y'' + py' + qy = 0. \tag{5.7}$$

Poznámka. Maximální řešení rovnice (5.7) jsou definována na celém $\mathbb{R}$.

Definice. *Charakteristickým polynomem* rovnice (5.7) rozumíme polynom

$$\chi(\lambda) := \lambda^2 + p\lambda + q.$$

Věta 5.5 (tvar fundamentálního systému)**.** *Nechť $\lambda_1.\lambda_2$ jsou kořeny charakteristického polynomu rovnice* (5.7)*.*

- *Pokud jsou λ_1, λ různé reálné kořeny, pak fundamentální systém řešení rovnice* (5.7) *tvoří funkce $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.*
- *Pokud $\lambda_1 = \lambda_2$, pak fundamentální systém řešení rovnice* (5.7) *tvoří funkce $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ a $y_2(x) = xe^{\lambda_1 x}$.*
- *Pokud jsou $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ různé komplexní kořeny, pak fundamentální systém řešení rovnice* (5.7) *tvoří funkce $y_1(x) = e^{\alpha x}\sin(\beta x)$ a $y_2(x) = e^{\alpha x}\cos(\beta x)$.*

Věta 5.6 (speciální pravá strana)**.** *Nechť*

$$r(x) = e^{ax} \cdot (P(x)\cos bx + Q(x)\sin bx), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ a P, Q jsou polynomy. Pak existuje řešení rovnice (5.6) *ve tvaru*

$$y_p(x) = x^m e^{ax}(R(x)\sin bx + S(x)\cos bx), \quad x \in \mathbb{R},$$

kde R, S jsou polynomy stupně ne většího než $\max\{\operatorname{st} P, \operatorname{st} Q\}$ a $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ udává, jakou násobnost má číslo $a + bi$ jakožto kořen charakteristického polynomu příslušné homogenní rovnice.

5.3. Soustavy diferenciálních rovnic

Definice. Soustavou dvou diferenciálních rovnic (prvního řádu) rozumíme soustavu

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2), \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2), \end{aligned} \tag{5.8}$$

kde f_1, f_2 jsou dané funkce definované na neprázdné otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^3$ a hledaným objektem jsou funkce x_1, x_2 definované na jistém otevřeném intervalu.

Vektorový tvar soustavy:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}),$$

kde $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, $\mathbf{x}' = (x_1', x_2')$ a $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$.

Definice. Řešením soustavy (5.8) rozumíme dvojici funkcí $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ definovanou na neprázdném otevřeném intervalu $I \subset \mathbb{R}$ takovou, že pro každé $t \in I$ platí $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$.

Maximální řešení soustavy (5.8) je takové řešení $\mathbf{x}$ definované na intervalu I, které již nelze prodloužit, tj. je–li $\mathbf{y}$ řešení definované na intervalu J, $I \subset J$ a $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t)$ pro každé $t \in I$, pak $I = J$.

Poznámka. Každá diferenciální rovnice 2.řádu se dá převést na soustavu dvou rovnic 1. řádu o dvou neznámých. Vskutku, rovnici $y'' = f(x, y, y')$, lze převést na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= f(t, x_1, x_2). \end{aligned}$$

Podrobněji, pokud je (x_1, x_2) řešením této soustavy rovnic, pak x_1 je řešením rovnice $y'' = f(x, y, y')$.

Definice (Soustava lineárních rovnic). **Soustavou dvou lineárních diferenciálních rovnic** rozumíme soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + b_1(t), \\ x_2' &= a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + b_2(t), \end{aligned} \tag{5.9}$$

kde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1$ a b_2 jsou funkce spojité na neprázdném otevřeném intervalu (α, β).

Pokud $(\alpha, \beta) = \mathbb{R}$ a funkce $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1$ a b_2 jsou konstantní, pak řekneme že se jedná o **soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic s konstaními koeficienty**

Věta 5.7 (Existence a jednoznačnost řešení). *Nechť $t_0 \in (\alpha, \beta)$ a $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$. Pak existuje právě-jedno maximální řešení $\mathbf{x}$ rovnice* (5.9)*, které splňuje podmínky $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$. Navíc, toto řešení je definováno na celém intervalu (α, β).*

Poznámka. Každou soustavu dvou lineárních rovnic s konstantními koeficienty 1. řádu lze převést na lineární diferenciální rovnici 2. řádu s konstantními koeficienty. Vskutku, nechť je dána soustava rovnic (5.9), kde $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1$ a b_2 jsou konstantní funkce na $\mathbb{R}$.

- Pokud $a_{12} = a_{21} = 0$, pak jsou jednotlivé rovnice na sobě nezávislé a nejedná se ani tak o soustavu rovnic, jako o dvě na sobě nezávislé rovnice, které můžeme vyřešit zvlášť.

- Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $a_{12} \neq 0$. Pak $x_2 = \frac{x_1' - a_{11}x_1 - b_1}{a_{12}}$, tedy $x_2' = \frac{x_1'' - a_{11}x_1'}{a_{12}}$. Pokud tedy vyřešíme rovnici

  $$y'' - (a_{11} + a_{22})y' + (a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21})y = a_{12}b_2 - a_{22}b_1,$$

  pak $x_1 = y$, $x_2 = \frac{y' - a_{11}y - b_1}{a_{12}}$ bude řešením zadané soustavy rovnic.

5.4. Stabilita řešení

Definice (stabilita řešení rovnice 2. řádu). Nechť $a \in \mathbb{R}^*$ a y je řešení diferenciální rovnice $y'' = f(x, y, y')$ na intervalu (a, ∞). Řekneme, že toto řešení je **stabilní** (resp. **asymptoticky stabilní**), pokud pro každé $x_0 > a$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že kdykoliv $\tilde{y}$ je řešením rovnice $y'' = f(x, y, y')$ na intervalu (a, ∞) splňujícím $|\tilde{y}(x_0) - y(x_0)| < \delta$ a zároveň $|\tilde{y}'(x_0) - y'(x_0)| < \delta$, pak

$$\forall x > x_0 : |\tilde{y}(x) - y(x)| < \varepsilon \quad \& \quad |\tilde{y}'(x) - y'(x)| < \varepsilon$$
$$(\text{resp.} \lim_{x\to\infty} |\tilde{y}(x) - y(x)| = \lim_{x\to\infty} |\tilde{y}'(x) - y'(x)| = 0).$$

Věta 5.8 (stabilita nulového řešení rovnice 2. řádu). *Nulové řešení rovnice $y'' + py' + qy = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) je*

(a) asymptoticky stabilní právě tehdy, když $p > 0$ a zároveň $q > 0$;

(b) stabilní a není asymptoticky stabilní právě tehdy, když $p = 0$ a zároveň $q > 0$ nebo $q = 0$ a zároveň $p > 0$;

(c) nestabilní v ostatních případech.

Dále byly na přednášce zmíněny některé aplikace diferenciálních rovnic (Malthusův populační model, radioaktivní rozpad, lineární dietní model, logistický populační model, vrh svislý vzhůru), které je třeba alespoň orientačně znát.

6. Funkce více proměnných

Definice. **Euklidovskou metrikou (vzdáleností) na** $\mathbb{R}^n$ rozumíme funkci $\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ definovanou pro $x, y \in \mathbb{R}^n$ předpisem

$$\rho(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Číslo $\rho(x, y)$ nazýváme **vzdáleností bodu** x **od bodu** y.

Lemma 6.1. *Definujme funkci* $\rho_{\max} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ *pro* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *předpisem* $\rho_{\max}(x, y) := \max\{|x_i - y_i|;\ i = 1, \ldots, n\}$*. Pak pro* $x, y \in \mathbb{R}^n$ *platí*

$$\rho_{\max}(x, y) \leq \rho(x, y) \leq \sqrt{n} \cdot \rho_{\max}(x, y).$$

Lemma 6.2 (základní vlastnosti Euklidovské metriky)**.** *Nechť* $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ *a* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Pak platí:*

(a) $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$*;*

(b) $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$*;*

(c) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$*;*

(d) $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$

Definice. Nechť $x \in \mathbb{R}^n$ a $R > 0$. Pak množinu

$$B(x, R) := \{y \in \mathbb{R}^n;\ \rho(x, y) < R\}$$

nazýváme **otevřenou koulí o středu** x **a poloměru** R.

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $x \in \mathbb{R}^n$ je **vnitřním bodem množiny** A, jestliže existuje takové $R > 0$, že $B(x, R) \subset A$. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je **otevřená**, pokud každý bod $x \in A$ je jejím vniřním bodem. **Vnitřkem** množiny A rozumíme množinu všech vnitřních bodů množiny A a značíme jej $\operatorname{Int} A$.

Definice. O množině $I \subset \mathbb{R}^n$ řekneme, že to je (otevřený) **interval**, pokud existují (otevřené) intervaly $I_1, \ldots, I_n \subset \mathbb{R}$ takové, že $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$.

Poznámky. (a) Z Lemmatu 6.1 plyne, že $A \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená právě tehdy, když pro každé $x \in A$ existuje takový interval I, že $x \in I$ a $I \subset A$.

(b) Otevřená koule je otevřená množina, otevřený interval je otevřená množina.

Věta 6.3 (vlastnosti otevřených množin)**.**

(a) Prázdná množina a celý prostor $\mathbb{R}^n$ *jsou otevřené v* $\mathbb{R}^n$*.*

(b) Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina.

(c) Průnik konečně mnoha otevřených množin je otevřená množina.

Definice. Nechť $\{x_k\}$ je posloupnost v $\mathbb{R}^n$ a $x \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že $\{x_k\}$ **konverguje** k x, jestliže $\lim_{k\to\infty} \rho(x_k, x) = 0$. Značíme $x_k \to x$, nebo také $\lim_{k\to\infty} x_k = x$, případně $\lim x_k = x$. Prvek x nazýváme **limitou posloupnosti** $\{x_k\}$ v $\mathbb{R}^n$. **Konvergentní posloupností** rozumíme posloupnost, která má limitu v $\mathbb{R}^n$.

Lemma 6.4 (vlastnosti konvergence)**.** *Nechť* $\{x_k\}$ *je posloupnost prvků z* $\mathbb{R}^n$ *a* $x \in \mathbb{R}^n$*. Pak platí:*

(a) $\{x_k\}$ *má nejvýše jednu limitu;*

(b) $\{x_k\}$ *konverguje k* x *právě tehdy když konverguje po složkách, tj. pro každé* $i = 1, \ldots, n$ *platí* $x_k(i) \to x(i)$*.*

Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je **uzavřená**, pokud platí následující implikace:

$$\{x_k\} \subset A, \;\; x_k \to x, \; x \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad x \in A.$$

Věta 6.5 (vztah otevřených a uzavřených množin)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$. Potom A je uzavřená právě tehdy, když $\mathbb{R}^n \setminus A$ je otevřená.*

Věta 6.6 (vlastnosti uzavřených množin)**.**

(a) Prázdná množina a celý prostor $\mathbb{R}^n$ jsou uzavřené v $\mathbb{R}^n$.

(b) Sjednocení konečně mnoha uzavřených množin je uzavřená množina.

(c) Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.

Definice. Nechť f je funkce n proměnných a $x \in \mathbb{R}^n$. Řekneme, že f **je spojitá v bodě** x, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in B(x, \delta) \colon |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a $x \in A$. Řekneme, **že f je spojitá v bodě x vzhledem k** A, pokud platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall y \in B(x, \delta) \cap A \colon |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Řekneme, že f **je spojité na množině** A, jestliže je spojité v každém bodě $a \in A$ vzhledem k A a že f **je spojité**, jestliže je spojité na $\mathbb{R}^n$.

Lemma 6.7. *Pro každé $i = 1 \dots, n$ je funkce $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i$ spojitá.*

Věta 6.8 (zachování spojitosti při aritmetických operacích)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$, $x \in A$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Jestliže f a g jsou spojité v bodě x vzhledem k A, potom také funkce αf, $f + g$ a fg jsou spojité vzhledem k M. Pokud navíc funkce g je nenulová v bodě x, pak je spojitá i funkce f/g v bodě x vzhledem k A.*

Věta 6.9 (složení spojitých funkcí je spojitá funkce)**.** *Nechť $r, s \in \mathbb{N}$, $A \subset \mathbb{R}^s$, $B \subset \mathbb{R}^r$ a $y \in A$. Necht' $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ jsou funkce definované na A, spojité v bodě y vzhledem k A a $(\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x)) \in B$ pro každé $x \in A$. Nechť $f : B \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě $(\varphi_1(y), \dots, \varphi_r(y))$ vzhledem k B. Potom složená funkce $F : A \to \mathbb{R}$ daná předpisem*

$$F(x) := f((\varphi_1(x), \dots, \varphi_r(x))), \quad x \in A$$

je spojitá v y vzhledem k A.

Věta 6.10. *Nechť f je spojitá funkce a $c \in \mathbb{R}$. Potom platí:*

(a) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n;\; f(x) > c\}$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.

(b) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n;\; f(x) < c\}$ je otevřená v $\mathbb{R}^n$.

(c) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n;\; f(x) \leq c\}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.

(d) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n;\; f(x) \geq c\}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.

(e) Množina $\{x \in \mathbb{R}^n;\; f(x) = c\}$ je uzavřená v $\mathbb{R}^n$.

Definice. Řekneme, že funkce f o n proměnných má v bodě $a \in \mathbb{R}^n$ limitu rovnou $A \in \mathbb{R}^*$, jestliže platí

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in B(a, \delta) \setminus \{a\} \colon f(x) \in B(A, \varepsilon).$$

Poznámky. (a) Každá funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu, píšeme $\lim_{x \to a} f(x) = A$.

(b) f je spojitá v a, právě když $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(c) Pro limity funkcí více promenných platí obdobné věty jako pro limity funkcí jedné proměnné (aritmetika, policajti, ...).

Definice. Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $1 \le i \le n$. Pak **parciální derivaci funkce f v bodě a podle i-té proměnné** definujeme jako limitu

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te^i)-f(a)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(a_1,\dots,a_{i-1},a_i+t,a_{i+1},\dots,a_n)-f(a_1,\dots,a_n)}{t},\end{aligned}$$

pokud tato limita existuje vlastní. Symbolem $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ označujeme **parciální derivaci funkce f podle i-té proměnné**, tj. funkci definovanou předpisem

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} : x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Úmluva. V dalším textu bude výrok„parciální derivace existuje“ znamenat, že parciální derivace existuje *vlastní*.

Věta 6.11 (existence řešení pro rovnice 1. řádu)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$je neprázdná otevřená množina a funkce $f : G \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak pro každé $(x_0, y_0) \in G$ existuje maximální řešení y rovnice*

$$y' = f(x, y) \tag{6.1}$$

splňující $y(x_0) = y_0$.

Pokud je navíc funkce $\frac{\partial f}{\partial y}$ spojitá v každém bodě množiny G, pak je toto řešení jednoznačné, tj. kdykoliv $\tilde{y}$ je maximálním řešením rovnice (6.1) *a $\tilde{y}(x_0) = y_0$, pak $y = \tilde{y}$.*

Věta 6.12 (existence řešení pro rovnice 2. řádu)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^3$ je neprázdná otevřená množina a funkce $f : G \to \mathbb{R}$ je spojitá. Pak pro každé $(x_0, y_0, z_0) \in G$ existuje maximální řešení y rovnice*

$$y'' = f(x, y, y') \tag{6.2}$$

splňující $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = z_0$.

Pokud jsou navíc funkce $\frac{\partial f}{\partial y}$ a $\frac{\partial f}{\partial y'}$ spojité v každém bodě množiny G, pak je toto řešení jednoznačné, tj. kdykoliv $\tilde{y}$ je maximálním řešením rovnice (6.2) *a $\tilde{y}(x_0) = y_0$, $\tilde{y}\,'(x_0) = z_0$, pak $y = \tilde{y}$.*

6.1. Popis množin v rovině a v prostoru

(a) **Grafy implicitních funkcí**: Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ a f je spojitá funkce na A. Rovnice

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0\,,$$

popisuje **implicitně** množinu $P = \{(x_1,\dots,x_n) \in A; f(x_1,\dots,x_n) = 0\}$ v $\mathbb{R}^n$.

Příklad. Rovnice $x^2 + y^2 = a^2$ popisuje kružnici o poloměru a a středu v počátku.

Příklad. Rovnice $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ popisuje povrch koule o poloměru a a středu v počátku.

(b) **Parametricky zadaná množina**: Nechť $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ jsou spojité funkce na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Rovnice

$$x_1 = \varphi_1(t)\,, \quad \dots, \quad x_n = \varphi_n(t) \quad \text{pro } t \in I$$

popisují **parametricky křivku** $P = \{(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t));\ t \in I\}$ v $\mathbb{R}^n$.

Příklad. Kružnice se středem v počátku poloměrem a je parametricky zadanou křivkou, kde

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t \quad \text{pro } t \in [0, 2\pi].$$

Příklad. Přímka procházející bodem (x_0, y_0, z_0) a mající směr vektoru (a, b, c) je parametricky zadanou křivkou, kde

$$x = x_0 + at,\ y = y_0 + bt,\ z = z_0 + ct, \quad \text{pro } t \in (-\infty, +\infty).$$

Nechť φ, ψ, τ jsou spojité funkce na otevřené množině $G \subset \mathbb{R}^2$.

Rovnice

$$x = \varphi(u,v)\,, \quad y = \psi(u,v)\,, \quad z = \tau(u,v) \quad \text{pro } (u,v) \in G$$

popisují **parametricky plochu** $P = \{(\varphi(u,v), \psi(u,v), \tau(u,v));\ (u,v) \in G\}$ v $\mathbb{R}^3$.

Příklad. $x = x_0 + a_1u + a_2v, y = y_0 + b_1u + b_2v, z = z_0 + c_1u + c_2v$ pro $u, v \in (-\infty, +\infty)$, je rovina procházející bodem (x_0, y_0, z_0), rovnoběžná s vektory $(a_1, b_1, c_1), (a_2, b_2, c_2)$.

(c) **Polární souřadnice** bodu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ jsou (r, α), kde

$$x = r\cos\alpha,\ y = r\sin\alpha \qquad r \geq 0,\ \alpha \in [0, 2\pi).$$

Pokud $(x, y) \neq (0, 0)$, pak ekvivalentní rovnosti jsou

$$r = \sqrt{x^2+y^2},\ \alpha = \begin{cases} \pi - \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y & \text{pokud } x = 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{pokud } x > 0\ \&\ y \geq 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi & \text{pokud } x < 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2\pi & \text{pokud } x > 0\ \&\ y < 0. \end{cases}$$

Příklad. Kružnice se středem v počátku a poloměrem a se dá v polárních souřadnicích popsat rovnicí

$$r = a, \quad \alpha \in [0, 2\pi).$$

(d) **Cylindrické (válcové) souřadnice** bodu (x, y, z) jsou (r, α, z), kde (r, α) jsou polární souřadnice bodu (x, y):

$$x = r\cos\alpha,\ y = r\sin\alpha,\ z = z\,.$$

Množina je popsána cylindrickými souřadnicemi zadáním funkce $z(r, \alpha)$ (nebo $r(\alpha, z)$).

Příklad. Kužel s vrcholem v počátku je dán rovnicí $r = z$ pro $\alpha \in [0, 2\pi), z \in [0, 1]$.

(e) **Sférické souřadnice**: **Sférické** souřadnice bodu (x, y, z) jsou (r, α, β), kde

$$x = r\sin\beta\cos\alpha,\ y = r\sin\beta\sin\alpha,\ z = r\cos\beta \qquad r \geq 0,\ \alpha \in [0, 2\pi),\ \beta \in [0, \pi].$$

Pokud $(x, y) \neq (0, 0)$, pak ekvivalentní rovnosti jsou

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}; \qquad \beta = \arccos\frac{z}{r};$$

$$\alpha = \begin{cases} \pi - \frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} y & \text{pokud } x = 0\ \&\ y \neq 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & \text{pokud } x > 0\ \&\ y \geq 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + \pi & \text{pokud } x < 0, \\ \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + 2\pi & \text{pokud } x > 0\ \&\ y < 0. \end{cases}$$

Množina je popsána sférickými souřadnicemi je-li zadána funkce $r(\alpha, \beta)$.

Příklad. Povrch koule o poloměru R a středu v počátku je zadán rovnicí

$$r = R \text{ pro } \alpha \in [0, 2\pi), \beta \in [0, \pi].$$

6.2. Spojitost funkcí a parciálních derivací, věta o implicitní funkci

Věta 6.13 (o nabývání mezihodnot). *Nechť $I \subset \mathbb{R}^n$ je interval, $f : I \to \mathbb{R}$ spojitá funkce a ať jsou dány body $a, b \in I$ takové, že $f(a) < f(b)$. Pak pro libovolné $\zeta \in (f(a), f(b))$ existuje $c \in I$ takové, že $f(c) = \zeta$.*

Věta 6.14 (o střední hodnotě). *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $I = (\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times (\alpha_n, \beta_n) \subset \mathbb{R}^n$, $a, b \in I$. Nechť v každém bodě I existují parciální derivace f podle všech proměnných. Potom existují body $\xi^1, \ldots, \xi^n \in I$ takové, že*

$$f(b) - f(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\xi^i)(b_i - a_i).$$

Věta 6.15 (vztah parciálních derivací a spojitosti). *Nechť f je reálná funkce n proměnných, $a \in \mathbb{R}^n$ a $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité funkce v bodě a. Pak f je spojitá v bodě a.*

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je neprázdná otevřená množina, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v každém bodě G vlastní i-tou parciální derivaci a $\mathbf{a} \in G$. Parciální derivaci funkce $\mathbf{x} \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$ podle proměnné x_j v bodě $\mathbf{a}$ značíme

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)}{\partial x_j}(\mathbf{a})$$

a nazýváme ji **parciální derivací druhého řádu** funkce f. Je-li $i = j$, pak používáme značení $\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x_i}(\mathbf{a})$.

Analogicky se definují parciální derivace vyšších řádů.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $k \in \mathbb{N}$. Nechť funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v každém bodě množiny G spojité všechny parciální derivace až do řádu k. Pak říkáme, že funkce f je třídy $\mathcal{C}^k$ na G. Množinu všech takových funkcí značíme $\mathcal{C}^k(G)$.

Věta 6.16 (o implicitní funkci)**.** *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená, $F : G \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in G$ a nechť platí*

(i) $F \in \mathcal{C}^k(G)$,

(ii) $F(x_0, y_0) = 0$,

(iii) $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ existuje právě jedno $y \in (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ s vlastností $F(x, y) = 0$. Označíme-li toto y symbolem $\varphi(x)$, pak $\varphi \in \mathcal{C}^k((x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon))$ a

$$\varphi'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varphi(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, \varphi(x))}, \qquad x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon).$$

6.3. Extrémy funkcí více proměnných

Definice. Nechť $M \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} \in M$ a f je reálná funkce definovaná alespoň na M (tj. $M \subset D(f)$ a $H(f) \subset \mathbb{R}$). Řekneme, že f nabývá v bodě x

- **maxima** na M, jestliže platí $\forall \mathbf{y} \in M : \ f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})$,
- **lokálního maxima vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, \delta) \cap M :$ $f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x})$,
- **ostrého maxima na** M, jestliže platí $\forall \mathbf{y} \in M \setminus \{\mathbf{x}\} : \ f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x})$,
- **ostrého lokálního maxima vzhledem k** M, jestliže existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall \mathbf{y} \in (B(\mathbf{x}, \delta) \setminus \{\mathbf{x}\}) \cap M : \ f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x})$

Analogicky definujeme **minimum** a **ostré minimum na** M, **lokální minimum** a **ostré lokální minimum vzhledem k** M.

Extrémy na otevřené množině

Věta 6.17 (nutná podmínka lokálního extrému)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\mathbf{a} \in G$ a funkce $f : G \to \mathbb{R}$ má v bodě $\mathbf{a}$ lokální extrém. Pak pro každé $j \in \{1, \dots, n\}$ platí:*

$$\textit{Parciální derivace} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}) \textit{buď neexistuje, nebo je rovna nule.}$$

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina, $\mathbf{a} \in G$ a $f \in \mathcal{C}^1(G)$. **Gradientem funkce f v bodě $\mathbf{a}$** rozumíme vektor

$$\nabla f(\mathbf{a}) := \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{a}) \right).$$

Pokud $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{o}$, pak bod $\mathbf{a}$ nazýváme **stacionárním bodem** funkce f.

Definice. Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je neprázdná otevřená množina, $\mathbf{a} \in G$ a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Pak **Hessova matice** je matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\mathbf{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\mathbf{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(\mathbf{a}) \end{pmatrix}$$

Značíme ji symbolem $\nabla^2 f(\mathbf{a})$.

Věta 6.18. *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je neprázdná otevřená množina, $f \in \mathcal{C}^2(G)$ a $\mathbf{a} \in G$ je stacionárním bodem funkce f. Potom platí:*

(a) Je–li matice $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ negativně definitní, nabývá f v bodě $\mathbf{a}$ ostrého lokálního maxima.

(b) Je–li matice $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ pozitivně definitní, nabývá f v bodě $\mathbf{a}$ ostrého lokálního minima.

(c) Je–li matice $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ indefinitní, nenabývá f v bodě $\mathbf{a}$ ani lokálního minima, ani lokálního maxima, tj. $\mathbf{a}$ je sedlový bod funkce f.

Poznámka. Pojem pozitivní/negativní definitnosti byl definován v předmětu Lineární algebra. Připomeňme, že symetrická matice $\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ je

- pozitivně definitní, právě když $a > 0$ a $ab > c^2$,
- negativně definitní, právě když $a < 0$ a $ab > c^2$,
- indefinitní, právě když $ab < c^2$.

Věta 6.19 (záměnnost parciálních derivací)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina a $f \in \mathcal{C}^2(G)$. Pak pro každé $a \in G$ platí $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$*

Extrémy na uzavřené množině - Lagrangeova věta o multiplikátoru

Definice. Množina $A \subset \mathbb{R}^n$ je **omezená**, pokud je omezená množina $\{\rho(x, 0);\ x \in A\}$.

Věta 6.20 (o nabývání extrémů)**.** *Nechť $A \subset \mathbb{R}^n$ je omezená uzavřená množina, $f : A \to \mathbb{R}$ spojitá funkce. Pak existují body $c, d \in A$ takové, že*

$$f(c) = \inf\{f(x);\ x \in A\}, \qquad f(d) = \sup\{f(x);\ x \in A\}.$$

Věta 6.21 (Lagrangeova věta o multiplikátoru)**.** *Nechť $G \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená množina, $f, g \in \mathcal{C}^2(G)$, $M = \{(x, y) \in G;\ g(x, y) = 0\}$ a $(x_0, y_0) \in M$ je bodem lokálního extrému funkce f vzhledem k množině M. Potom je splněna alespoň jedna z následujících podmínek:*

(a) $\nabla g(x_0, y_0) = (0, 0)$,

(b) existuje číslo $\lambda \in \mathbb{R}$ splňující

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = 0.$$

6.4. Dvojné a dvojnásobné integrály[1]

Definice. Nechť $A \subset \mathbb{R}^2$ je množina. Pro $x \in \mathbb{R}$ označme $A_x = \{y \in \mathbb{R};\ (x, y) \in A\}$. Nechť $\{x \in \mathbb{R};\ A_x \neq \emptyset\}$ je interval s krajními body $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Nechť $f : A \to \mathbb{R}$ je funkce. Definujeme

$$\iint_A f \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x := (N) \int_a^b \left(\int_{A_x} f(x, y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

pokud je výraz na pravé straně definován, kde symbolem $\int_{A_x} f(x, y) \,\mathrm{d}y$ rozumíme Newtonův integrál z funkce $y \mapsto f(x, y)$ přes vnitřek intervalu A_x (speciálně, pokud A_x není interval pro nějaké $x \in (a, b)$, pak symbol $\iint_A f \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x$ není definován).

Analogicky definujeme také $\iint_A f \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$.

[1]Tato sekce má ryze informativní charakter a bude podrobněji a přesněji probrána v rámci předmětu Kalkulus 3.

Poznámka. Dvojným integrálem obvykle rozumíme symbol „$\iint_A f \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$“, dvojnásobným integrálem obvykle rozumíme výraz „$\int_a^b \left(\int_{A_x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$“. Definice dvojného integrálu jako výše je specifická pro tuto přednášku. V matematické teorii se dvojný integrál definuje jiným způsobem. Pro dostatečně rozumné funkce a množiny ale obě definice (ta výše a ta obvyklá) splývají.

6.5. Příklady parciálních diferenciálních rovnic[2]

Při řešení parciální diferenciální rovnice hledáme funkci více proměnných, která se v rovnici vyskytuje spolu se svými parciálními derivacemi. V následujícím textu uvedeme některé základní příklady parciálních diferenciálních rovnic.

V následujících rovnicích uvažujeme neprázdnou otevřenou souvislou[3] $G \subset \mathbb{R}^n$. Pokud v rovnici není uvedena parciální derivace podle času (tj. podle proměnné t), pak hledáme funkci $u = u(x)$, $x \in G$; v opačném případě hledáme funkci $u = u(t,x)$, $t \in (0,T)$, $x \in G$. Používáme značení

$$\Delta u := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x_i}$$

- **Laplaceova rovnice:**
$$\Delta u = 0$$
- **Poissonova rovnice:**
$$\Delta u = f(x)$$
- **Rovnice vedení tepla:**
$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \Delta u = f(t,x),\ a > 0$$
- **Vlnová rovnice:**
$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 t} - \Delta u = f(t,x),\ c > 0$$

[2] Tato sekce má ryze informativní charakter, nebude podrobněji probírána.
[3] Množina G je souvislá, pokud každé dva body ležící v množině G lze spojit lomenou čarou, ležící v G.