——————1. cvičení——————

I. ÚVOD

1. Uvažme následující výroky:

(i) $\forall x \in M\ \exists y \in M\ \exists z \in M \quad x = y + z$ (ii) $\exists y \in M\ \forall x \in M\ \exists z \in M \quad x = y + z$

(iii) $\exists y \in M\ \exists z \in M\ \forall x \in M \quad x = y + z$

Které z nich jsou pravdivé a které nepravdivé, je–li
a) $M = \mathbb{N}$ b) $M = \mathbb{N} \cup \{0\}$ c) $M = (0, 1)$ d) $M = \{0\}$?

2. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.
a) $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\,(z > x \Rightarrow y < z)$; b) $\exists y \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\ (z > x \Rightarrow y < z)$;
c) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\,(z > x \Rightarrow y < z)$; d) $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ \forall z \in \mathbb{N}\,(z < x \Rightarrow y > z)$;
e) $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R}\,(|y - x| < \delta \Rightarrow y < x + \frac{\varepsilon}{3})$.

3. Platí pro libovolné množiny A, B a C následující vztahy? Své tvrzení dokažte.
a) $A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$ b) $A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B$ c) $(A \cap B) \setminus (B \cap C) = (C \cap B) \setminus (A \cap C)$
d) $(A \cap B) \setminus (B \cap C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$ e) $(A \cup B) \setminus C = A \setminus (C \cup B)$

4. Dokažte, že pro každé těleso $(T, +, \cdot, 0, 1)$ platí:
(pozn: $(T, +, \cdot, 0, 1)$ je těleso pokud tato pětice aplňuje sadu I. axiomů reálných čísel z přednášky)

a) $\forall x, y, z \in T: \quad x + y = x + z \Rightarrow y = z$
b) Nechť $x \in T, x \neq 0$. Pak opačný prvek $(-x)$ a inverzní prvek $\frac{1}{x}$ jsou jednoznačně definovány.
c) $\forall x \in T:\ x \cdot 0 = 0$ d) $-0 = 0$ e) $\forall a \in \mathbb{R}:\ -(-a) = a$ f) $\forall a \in T:\ -a = (-1) \cdot a$
g) $\forall a, b \in T:\ (-a)b = -(ab) = a(-b)$ h) $\forall x, y \in T:\ (-x)(-y) = xy$
i) $\forall a, b \in T:\ ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0)$

——————2. cvičení——————

5. Najděte suprema a infima následujících množin (pokud existují). Existují maxima a minima?

a) $A = \{-\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$; b) $B = \{\frac{n+(-1)^n}{n};\ n \in \mathbb{N}\}$;
c) $C_1 = \{n^2 - m^2;\ n, m \in \mathbb{N}\}$, $C_2 = \{n^2 - m^2;\ \ n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$, $C_3 = \{n^2 - m^2;\ \ n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$;
d) $D_1 = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{N}\}$, $D_2 = \{2^{-n} + 3^{-n};\ n \in \mathbb{Z}\}$;
e) $E = \{n^{(-1)^n};\ n \in \mathbb{N}\}$; f) $F = \{5^{(-1)^j 3^k};\ j \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}\}$;

I. ÚVOD - VÝSLEDKY

1. a) (i), (ii), (iii) neplatí b) (i), (ii) platí; (iii) neplatí c) (i) platí; (ii), (iii) neplatí d) (i), (ii), (iii) platí
2. a) Platí, negace $\exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{N}\, \exists z \in \mathbb{N}\, (z > x \ \&\ y \geq z)$;
b) Platí, negace $\forall y \in \mathbb{N}\, \exists x \in \mathbb{N}\, \exists z \in \mathbb{N}\, (z > x \ \&\ y \geq< z)$;
c) Neplatí, negace $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N}\, \exists z \in \mathbb{N}\, (z > x \ \&\ y \geq z)$;
d) Platí, negace $\forall x \in \mathbb{N}\, \exists y \in \mathbb{N}\, \exists z \in \mathbb{N}\, (z < x \ \&\ y \leq z)$;
e) Platí, negace $\exists x \in \mathbb{R}\, \exists \varepsilon > 0\, \forall \delta > 0\, \exists y \in \mathbb{R}\, (|y - x| < \delta \ \&\ y \geq x + \frac{\varepsilon}{3})$.
3. a) ano b) ano c) ne d) ano e) ne
5. a) $\sup A = 0, \min A = -1$ b) $\max B = \frac{3}{2}, \min B = 0$ c) C_1 nemá supremum ani infimum (není zdola, ani shora omezená), C_2 není shora omezená, $\min C_2 = 3$, $\max C_3 = 0$, C_3 není zdola omezená d) $\max D_1 = \frac{5}{6}$, $\inf D_1 = 0$, D_2 není shora omezená, $\inf D_2 = 0$ e) E není shora omezená, $\inf E = 0$ f) F není shora omezená, $\inf F = 0$.

3. cvičení

II. LIMITY POSLOUPNOSTÍ

1. Spočtěte následující limity posloupností: a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n-3}{n^3-1}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^3+6n}{n^3-7n+7}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^5+3n-2}{n^5-3n^3+1}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n+11}-\sqrt[3]{n}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$ g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+(n+1)^2}{(n+3)^2+(n+4)^2}$

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+4)^{27}-(n+1)^{27}}{(2n^2+5)^{13}-(n^2-1)^{13}}$ j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^2-1)(n+2)^3-n^2}{3n(n^2+5)(n^2+1)}$ k) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$

l) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+2}-\sqrt[3]{n-1})$ m) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt[3]{n^3+1})$ n) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n+2}-\sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3}-\sqrt[3]{n}}$

o) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+n+1}-n-1}{\sqrt{n}}$ p) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}{n+1}}$

4. cvičení

2. Spočtěte následující limity posloupností([·] značí celou část):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+5^n+n^3}{1+5n^2+3\cdot 5^n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^7+1)^8-(n^7+2)^8}{(n+1)^{50}-(n+2)^{50}}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{n+\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}}{n+1}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\cdot n\cdot(\sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+5})$ e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n+6}\right)\dfrac{3+(-5)^n+n!+4^n}{n^n+8-6n!}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n^6+n)^5-(n^6+7n)^5}{(n^5+1)^6-(n^5+6)^6}$ g) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+[\sqrt[3]{n}]^3}{n-[\sqrt{n+9}]}$ h) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+n^5+(n+1)!}{n(n^6+n!)}$ i) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5^n+4^n+3^n+2^n}$

j) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$ k) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n+2\cdot 2^n}-\sqrt{3^n+2^n}}$ l) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{2^n+3^n}}{\sqrt[2n]{4^n+\sqrt{n}}}$

m) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n-[\sqrt[3]{n!}]}{3n^3-[\sqrt[3]{(n+1)!}]}$ n) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[6]{n^5+1}-\sqrt[5]{n^4-n^3}+\sqrt[n]{n^2}}{\sqrt{n-\sqrt{n}}}$ o) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5+\sqrt[3]{n^3+n^2}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}$

3. Spočtěte následující limity posloupností (příklady ze zkouškových písemek na FSV):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} ((n^{10}+n^3)^7-(n^7+1)^{10})\cdot\left(\sqrt[3]{(1+\dfrac{1}{n^9})^7}-1\right)^7$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+\frac{2}{n})^{30}-(n+\frac{1}{n})^{30}}{\sqrt{(2+n^7)^8-2^8}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\left(25+\dfrac{1}{n}\right)^6-\left(5+\dfrac{1}{n}\right)^{12}\right)\cdot\sqrt[6]{(n+2)^7-(n-1)^7}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^5+17\sqrt[6]{n}}-\sqrt{n^5-5\sqrt[6]{n}+1}}{\sqrt[3]{n^5+18n-16}-\sqrt[3]{n^5-9n}}$

4. Pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ určete hodnoty $\limsup_{n\to\infty} a_n$ a $\liminf_{n\to\infty} a_n$:

a) $a_n=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}$ b) $a_n=(-1)^n\frac{n^2+1}{n+1}$ c) $a_n=1+\frac{n}{n+1}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ d) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cos(n\pi)$ e) $a_n=n^{(-1)^n}$

5. Spočtěte následující limity posloupností (ukázkové příklady k prvnímu zápočtovému testu):

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n(\sqrt{n^2+2}-\sqrt[3]{n^3+1})}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n\dfrac{2^n+4n+6}{2^n(\sqrt[n]{5}-1)}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+2)^{711}-(n+8)^{711}}{(n^{11}+3)^{71}-(n^{11}+4)^{71}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3n^2+[n!]}{3^n+4n^2+[2n!]}$

II. LIMITY POSLOUPNOSTÍ - VÝSLEDKY

1. a) 0 b) 2 c) 2 d) 0 e) 0 f) Nemá limitu g) 1/2 h) 1 i) $\frac{81}{2^{13}-1}$ j) $\frac{1}{3}$ k) $\frac{1}{2}$ l) 0 m) $\frac{1}{2}$ n) 0 o) 0 p) 1

2. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{8}{50}$ c) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ d) Nemá limitu e) 0 f) 1 g) 2 h) 1 i) 5 j) $\frac{1}{3}$ k) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ l) $\frac{3}{2}$ m) 0 n) $+\infty$ o) 0

3. a) $-\frac{7^7}{3^6}$ b) 30 c) $-54 \cdot 5^{10} \cdot \sqrt[6]{21}$ d) $\frac{11}{9}$

4. a) $\limsup_{n\to\infty} a_n = 1$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$ b) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty$ c) $\limsup_{n\to\infty} a_n = 2$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$ d) $\limsup_{n\to\infty} a_n = e$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = -e$ e) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \infty$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$

5. a) 1 b) limita neexistuje c) 0 d) $\frac{1}{2}$

5. cvičení

III. LIMITA A SPOJITOST FUNKCE

1. Řešte následující nerovnosti a rovnosti v $\mathbb{R}$:

a) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$; b) $\frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}$; c) $\log_{\frac{1}{8}}(x^2-3x+3) \geq 0$; d) $\log(x^2+1) = 2\log(3-x)$;

e) $\sin 2x < \cos x$; f) $x \leq \left|\frac{x+2}{x-3}\right|$; g) $|x-|x+1|| \leq 2x$;

h) $|x-|x-1|| = 1-|x|$; i) $\frac{x^2+2}{x+7} < 2(x-7)$; j) $\log_7(49x^2) = 4\cdot(\log_7 x)^2$.

2. Načrtněte graf funkce

a) $f(x) = 1-|\cos\frac{x}{2}|$; b) $g(x) = \frac{1}{2}+\cos(\frac{\pi}{2}+|x|)$; c) $h(x) = ||||x|-1|-1|-1|$;

d) $i(x) = \left|\frac{3x+3}{2x-4}\right|$; e) $j(x) = |\log|1-x||$.

6. cvičení

3. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje

a) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$ c) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$ d) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$ e) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$

4. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (příklady na podíly polynomů):

a) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-2x+1}$ b) $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{1}{x(x-2)^2}-\dfrac{1}{x^2-3x+2}\right)$ c) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$

5. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (příklady na výrazy s odmocninami):

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x^n}$, $n\in\mathbb{Z}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2+7}-\sqrt[3]{x^3+7}}{(x-1)^n}$, $n\in\mathbb{Z}$ c) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$

d) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{1+x}}{x^2-9}$

6. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (příklady na použití známých limit $\frac{\sin x}{x}\to1$, $\frac{\log x}{x-1}\to1$, $\frac{e^x-1}{x}\to1$ a VOLSF):

a) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x-\sin3x}{\sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ (tuto limitu dále lze považovat za „známou“) c) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\log(\cos x)}{x^2}$

d) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin^2x}-\cos x}{x^2}$ e) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{\sin^3x}$

f) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\sin^3x}$ g) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ i) $\lim\limits_{x\to0}\left(1+x^2\right)^{\operatorname{cotg}^2x}$ j) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2x}}$

7. cvičení

7. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log(x^2-x+1)}{\log(x^{10}+x+1)}$ b) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}$ (tuto limitu dále lze považovat za „známou“) c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\log(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\log(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$

d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{(x-\frac{\pi}{4})^2}$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\log(1+2^x)\cdot\log\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$ f) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\arcsin x}{\sin(\sin x)}$ g) $\lim\limits_{x\to0}\frac{(\cos x)^x-\sqrt{1+\sin^3x}}{x^3}$

h) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ i) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2x}$ j) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$ k) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x\cdot2^x}{1+x\cdot3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

Věta (Heineova věta)**.** Nechť $c\in\mathbb{R}^*$, $A\in\mathbb{R}^*$ a funkce f je definována na nějakém prstencovém okolí bodu c. Pak jsou následující dva výroky ekvivalentní.

(i) Platí $\lim_{x\to c}f(x)=A$.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\}$ splňující $x_n\in D_f$, $x_n\neq c$ pro všechna $n\in\mathbb{N}$ a $\lim_{n\to\infty}x_n=c$, platí $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

8. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^{\frac{1-\sqrt{n}}{1-n}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log(e^{2x}+x^3)}{\log(e^x+x^4)}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2}-1)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[x]{1+x^2+3^x+x^x}}{2x}$

9. Zjistěte, ve kterých bodech definičního oboru je funkce spojitá (pokud není v nějakém bodě spojitá, určete jestli je spojitá zleva a zprava).

a) $\max\{2x, x^2\}$ b) $[x]\cdot\log x$ c) $f(x)=\begin{cases}(\sin x)^{\cos x} & x\in(0,\pi),\\ 0 & x=0,\\ 1 & x=\pi.\end{cases}$

8. cvičení

9. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na FSV):

a) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{(1+\cos x)^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\log(1+x^3+3^x+x^x)}{\log(1+x^3+3^x)\log(1+x^3)}$ c) $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg} x\cdot\log(\sin^2 x)}{\sqrt{1+\sin x}}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^3+\sin n}-\sqrt{n^3+3n}}{\sqrt[4]{n^2+n}-\sqrt[4]{n^2+\operatorname{arctg} n}}$ e) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{cotg} x}{2}\right)^{\operatorname{tg}^2 2x}$

10. Spočtěte následující limity posloupností, nebo ukažte že limita neexistuje (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na MFF):

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{1}{n})^{120}-(1+\frac{2}{n})^{80}}{(1-\frac{1}{n})^{100}+(1+\frac{3}{n})^{100}-2}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log(n^2+n+1)-\log(n^2+n)}{\sqrt{n^4+2}-\sqrt{n^4+1}}$

11. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na MFF):

a) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\log(1+x^3+3^x+x^x)}{\log(1+x^3+3^x)\log(1+x^3)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1^x+2^x+3^x}{3}\right)^{1/x}$

12. Spočtěte následující limity, nebo dokažte že limita neexistuje (ukázkové příklady k druhému zápočtovému testu)

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\log(1+x^2+2^x)}{\log(1+x^3+3^x)}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+3x+4}{x+4}\right)^{1/\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)\sin x}{x^2-8x+16}$ d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin^4 x}-\sqrt{1+\sin^5 x}}{x^4}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^x-\cos x}{x^2}$ f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(1+\frac{5}{n})^{60}-1}{(1+\frac{3}{n})^{50}-1}$

III. LIMITA A SPOJITOST FUNKCE - VÝSLEDKY

1. a) $(4;6]$ b) $(-6;-3)\cup(\frac{-1-\sqrt{13}}{2},\frac{-1+\sqrt{13}}{2})$ c) $[1;2]$ d) $\frac{4}{3}$
e) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}((-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi)\cup(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi))$
f) $(-\infty,3)\cup(3,2+\sqrt{6}]$ g) $[\frac{1}{2},\infty)$
h) $\{0,\frac{2}{3}\}$ i) $(-10;-7)\cup(10;\infty)$ j) $\{7,\frac{\sqrt{7}}{7}\}$

3. a) $-\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{3^{10}}{2^{10}}$ e) $\frac{49}{24}$ **4.** a) $+\infty$ b) ∞ c) 0
5. a) 0 pro $n<1$, 1 pro $n=1$, pro $n>1$ sudé limita neexistuje a pro $n>1$ liché je limita ∞ b) 0 pro $n<1$, $-\frac{1}{12}$ pro $n=1$, pro $n>1$ sudé limita neexistuje a pro $n>1$ liché je limita $-\infty$ c) $\frac{12}{5}$ d) $-\frac{1}{16}$
6. a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{3}{2}$ e) neexistuje f) $\frac{1}{2}$ g) 0 h) e^3 i) e j) 1
7. a) $\frac{1}{5}$ b) 1 c) $\frac{3}{2}$ d) neexistuje e) $3\log 2$ f) 1 g) -1 h) $\frac{1}{2}$ i) $-\frac{1}{12}$ j) $\frac{4}{3}$ k) $\frac{2}{3}$
8. a) 1 b) 2 c) $\log 2$ d) $\frac{1}{2}$
9. a) spojitá na $\mathbb{R}$ b) spojitá na $(0,\infty)\setminus\mathbb{N}$ a v bodě $x=1$, v bodech $x\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ spojitá zprava a nespojitá zleva c) spojitá v $(0,\pi)$, v bodě $x=0$ spojitá zprava (spojitost zleva nemá smysl vyšetřovat), v bodě $x=\pi$ není spojitá zleva (spojitost zprava nemá smysl vyšetřovat)
9. a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{3\log 3}$ c) limita neexistuje (zprava $\sqrt{2}$, zleva $-\sqrt{2}$) d) -6 e) $\sqrt{e}$
10. a) $-\frac{1}{5}$ b) 2
11. a) $\frac{1}{3\log 3}$ b) $\sqrt[3]{6}$
12. a) $\frac{\log 2}{\log 3}$ b) $\sqrt{e}$ c) limita neexistuje d) $\frac{1}{2}$ e) $\frac{3}{2}$ f) 2

IV. DERIVACE

1. Spočtěte derivaci následujících funkcí ve všech bodech, kde existuje (ukázkové příklady k druhému zápočtovému testu)

a) $(1+\sin^2 x)^{\operatorname{arctg} x}$ b) $(x^3+4)e^{\sin x}$

2. Najděte $A \in \mathbb{R}$, aby pro každé $x \in (0,\infty)$ platil vztah

$$\left(\log(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^4 x}) + \operatorname{arctg} x + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)' = A\frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\cos^4 x}}.$$

——————9. cvičení——————

3. Spočtěte derivaci (resp. jednostranné derivace) následujících funkcí ve všech bodech, kde existuje.

a) $\arccos(\frac{1-x^2}{1+x^2})$ b) $x^2\exp(-|x-1|)$ c) $\sqrt{1-e^{-x^2}}$ d) $x\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg}\sqrt{x} - \sqrt{x}$ e) $\log\arccos x$

f) $f(x) = \begin{cases} (\sin x)^{\cos x} & x \in (0,\pi), \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

4. Vyšetřete spojitost a najděte derivaci funkce $f(x) =$

Ze zkouškových písemek na FSV: a) $\max\{5x-4, x^2\}$ b) $[x]\cdot\sqrt[3]{x^2-9}$ c) $|\cos 2x|\cdot(\operatorname{tg} x - 1)$

Ze zkouškových písemek na MFF: d) $f(x) = \begin{cases} x^2(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

e) $\cos x \cdot [\sin x]$ f) $(e+|x|)^x$

5. Spočtěte limity (můžete používat l'Hospitalovo pravidlo)

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg} 4x - 12\operatorname{tg} x}{3\sin 4x - 12\sin x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{cotg} x - 1}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2\sin^2 x - 1}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x - x}{\ln x - x + 1}$ g) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{e^x - 1}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$

i) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x - x^a}{x - a}$, $a > 0$

——————10. cvičení——————

6. Nalezněte globální extrémy funkce $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $x \in [-3,2]$

7. Nalezněte extrémy (lokální i globální) funkcí

a) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ b) $g(x) = |x|e^{-|x-1|}$, $x \in \mathbb{R}$

8. Vyšetřete průběh funkce $f(x) =$

Ze zkouškových písemek na FSV: a) $\left(3^{x+2|x|} - 9\right)^2$ b) $\operatorname{arctg}\frac{x^2}{x^2-6}$ c) $(x+\log 2)\cdot 2^{-\frac{5}{x}}$

Ze zkouškových písemek na MFF: d) $\frac{x^3}{\sqrt{|x^4-1|}}$ e) $|(1-x^2)e^{-x}|$

IV. DERIVACE - VÝSLEDKY

1. a) $(1+\sin^2 x)^{\operatorname{arctg} x} \cdot \left(\frac{\log(1+\sin^2 x)}{1+x^2} + \frac{2\sin x \cos x \operatorname{arctg} x}{1+\sin^2 x}\right),\ x \in \mathbb{R}$ b) $3x^2 e^{\sin x} + (x^3+4)e^{\sin x}\cos x,\ x \in \mathbb{R}$

2. $A = -1$

3. a) $f'(x) = \frac{2\operatorname{sgn}(x)}{1+x^2}$ pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f'_+(0) = 2$, $f'_-(0) = -2$.

b) $f'(x) = 2x\exp(-|x-1|) - x^2\exp(-|x-1|)\operatorname{sgn}(x-1)$ pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'_+(1) = 1$, $f'_-(1) = 3$.

c) $f'(x) = \frac{xe^{-x^2}}{\sqrt{1-e^{-x^2}}}$ pro $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$.

d) $f'(x) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ pro $x > 0$, $f'_+(0) = 0$.

e) $f'(x) = -\frac{1}{\arccos x \cdot \sqrt{1-x^2}}$ pro $x \in (-1,1)$, $f'_+(-1) = -\infty$.

f) $f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \cdot (\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \log \sin x)$ pro $x \in (0,\pi)$, $f'_+(0) = 1$.

4. a) f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = 5$ pro $x \in (1,4)$; $f'(x) = 2x$ pro $x \in (-\infty,1)\cup(4,\infty)$; $f'_+(1) = f'_-(4) = 5$, $f'_-(1) = 2$, $f'_+(4) = 8$.

b) $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá v každém bodě $\mathbb{R}\setminus(\mathbb{Z}\setminus\{-3,3\})$, v bodech $\mathbb{Z}\setminus\{-3,3\}$ je spojitá zprava a nespojitá zleva. $f'(x) = \frac{2}{3}x[x](x^2-9)^{-2/3}$ pro $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$; $f'(-3) = f'(3) = \infty$; pro $k \in \mathbb{Z}\setminus\{-3,3\}$ je $f'_+(k) = \frac{2}{3}k^2(k^2-9)^{-2/3}$ a $f'_-(k) = \begin{cases} \infty, & |k| > 3, \\ -\infty, & |k| < 3. \end{cases}$

c) $D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$, f je spojitá v každém bodě D_f. $f'(x) = -2\sin 2x \cdot (\operatorname{tg} x - 1)\cdot \operatorname{sgn}(\cos 2x) + |\cos 2x| \frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+k\pi, -\frac{\pi}{4}+k\pi) \cup (-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi) \cup (\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi)$; $f'(\frac{\pi}{4}+k\pi) = 0$, $f'_+(-\frac{\pi}{4}+k\pi) = -4$, $f'_-(-\frac{\pi}{4}+k\pi) = 4$ pro $k \in \mathbb{Z}$.

d) $f'(x) = \begin{cases} 2x(\sin\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}) + \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0. \end{cases}$

e) $D_f = \mathbb{R}$, f spojitá v každém bodě $\mathbb{R}\setminus\{k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$, v bodech $\{2k\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$ je spojitá zprava a nespojitá zleva, v bodech $\{(2k+1)\pi :\ k \in \mathbb{Z}\}$ je spojitá zleva a nespojitá zprava. Pro $k \in \mathbb{Z}$ máme: $f'(x) = 0$ pro $x \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$; $f'(x) = \sin x$ pro $x \in ((2k-1)\pi, 2k\pi)$; $f'_+(2k\pi) = f'_-((2k+1)\pi) = 0$; $f'_-(2k\pi) = f'_+((2k+1)\pi) = +\infty$.

f) f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = (e+|x|)^x \cdot (\log(e+|x|) + \frac{|x|}{e+|x|})$ pro $x \in \mathbb{R}$
(pozor, $f'(0) = 1$ je potřeba spočítat zvlášť)

5. a) 2 b) -2 c) $-\frac{1}{3}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $-\frac{e}{2}$ f) -2 g) $\frac{1}{2}$ h) $e^{1/6}$ i) $a^a(\ln a - 1)$

6. $\max f(x) = f(2) = 4$, $\min f(x) = f(-3) = -16$

7. a) maximum neexistuje (ani lokální), globální minimum v bodě $\frac{7}{5}$ b) globální maximum v bodě 1, globální minimum v bodě 0, lokální maximum v bodě -1

8. a) , b) , c) : viz. výsledky zkouškové písemky z roku 2008/2009, varianty E, D, B
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/pis-fsv/0809/pis.htm`
d) , e) : viz. sepsané úlohy od Petra Pošty (sepsáno v roce 2010/11)
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~pposta/priklady/PrubFR.pdf`

——————11. cvičení——————

V. ŘADY

1. Pro posloupnost $(a_n)_{n=1}^\infty$ **nalezněte co nejjednodušší posloupnost** $(b_n)_{n=1}^\infty$ **která se chová jako** $(a_n)_{n=1}^\infty$ **ve smyslu** $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \in (0,\infty)$**:**

a) $a_n = \frac{2n^2+4}{n^3+4n+6}$ b) $a_n = \frac{4n^2+6n+2}{2^n+3^n}$ c) $a_n = (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1})$ d) $a_n = \frac{\sqrt{n^3+2} - \sqrt[3]{n^2+4}}{(n+2)^{20}-n^{20}}$
e) $a_n = (1+\frac{1}{n})^n \frac{\sqrt[9]{n^{10}} + \sqrt[8]{n^7}}{\sqrt[4]{n^5}+\sqrt[3]{n^2}}$ f) $a_n = \frac{[(n+3)^2]}{\sqrt[n]{n^n+5n!+4^n}}$ g) $a_n = \sqrt[n]{\frac{1}{((n+1)^3-n^3-3n^2)^{n-1}}}$

2. Určete, zda konvergují následující řady:

a) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n^2+3n+4}{n^2+5}$ b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2}{n^3+1}$ c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+3}}$ d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{3}{2^n-2n}$ e) $\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n+(-1)^n n}{3^n+(-1)^n n}$
f) $\sum_{n=1}^\infty (\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3-1})$ g) $\sum_{n=1}^\infty \frac{3^n+4^n}{4^n+5^n}$ h) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt[3]{n^2+4} - \sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt[3]{n}}$ i) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2+\frac{1}{n})^n}$ j) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$
k) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^{n-1}}{\sqrt{(n^2-n+1)^{n+1}}}$ l) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n^3+2}-\sqrt[3]{n^2+4}}{(n+2)^{20}-n^{20}}$ m) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt{n+6}-\sqrt{n+1}}{\sqrt[n]{n^n+3n!+4^n}}$ n) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{3^n}$ o) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^3+4n+1}{4^n+3n}$

3. Určete, zda konvergují následující řady:

a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ c) $\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{nx}}{n}, x\in\mathbb{R}$ d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{e^{nx}}{n^2}, x\in\mathbb{R}$ e) $\sum_{n=1}^\infty (\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$
f) $\sum_{n=1}^\infty (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1})$ g) $\sum_{n=1}^\infty (\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1})$ h) $\sum_{n=1}^\infty \frac{2n^2+3n+4}{2n^4+3}$ i) $\sum_{n=1}^\infty \frac{2n^2+3n+4}{2n^3}$
j) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^8}{3^n+5^n}$ k) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^5}{5^n}$ l) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sqrt[9]{n^{10}}+\sqrt[10]{n^9}}{\sqrt[9]{n^{11}}+\sqrt[11]{n^9}}$ m) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{(n+\frac{1}{n})^n}$ n) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$

5. Určete, zda následující řady konvergují absolutně:

a) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ b) $\sum_{n=1}^\infty \sin(n^2+3n)\frac{4^n+3^n}{5^n+2^n}$ c) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{\sqrt[9]{n^{10}}+\sqrt[10]{n^9}}{\sqrt[9]{n^{11}}+\sqrt[11]{n^9}}$

6. Vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) následujících řad:

a) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{n\log n}$ b) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n}{n+1}$ c) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n^2}{n^3+1}$ d) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$
e) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n (\sqrt{n^2+n}-n)$ f) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n}{n^2+6}$ g) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n}{(n^2+1)\log n}$

——————12. cvičení——————

7. Vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) následujících řad:

a) $\sum_{n=1}^\infty \cos(n^2)(\sqrt{n^6+n}-n^3)$ b) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n}{n+1}\cos(\frac{1}{n})$ c) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n}{n^2+1}\cos(\frac{1}{n})$
d) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{\log n}\cos\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$ e) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n\sin n}{n^2+1}$ f) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\sin(n)\cos(\frac{1}{n})}{n}$ g) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{2n^2+3n+4}{2n^4+3}$

8. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad (jedná se o příklady ze zkouškových písemek na MFF):

a) $\sum_{n=1}^\infty \arcsin(\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2-1})\sqrt{\sin(\frac{1}{n})}$ b) $\sum_{n=1}^\infty \operatorname{arctg}(\frac{1}{n}-\frac{1}{\sqrt{n^2+1}})\frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{(\sin(\frac{1}{n}))^{\frac{10}{3}}}$
c) $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{\log n}\operatorname{arctg}((-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}})$ d) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\operatorname{arccotg}(2n)}{\sqrt[3]{n+4}}$ e) $\sum_{n=1}^\infty \cos(\pi n)\arccos(\log(e-\frac{1}{n}))$ (zde AK nevyšetřujte)

V. ŘADY - VÝSLEDKY

1. a) $\frac{1}{n}$ b) $\frac{n^2}{3^n}$ c) $\frac{1}{n^{2/3}}$ d) $\frac{1}{n^{35/2}}$ e) $\frac{1}{n^{5/36}}$ f) n g) $\frac{1}{n}$
2. a) Diverguje (D) b) D c) D d) Konverguje (K) e) K f) K g) K h) K i) K j) D k) K l) K m) K n) K o) K
3. a) K b) K c) K pro $x < 0$, D pro $x \geq 0$ d) K pro $x \leq 0$, D pro $x > 0$ e) K f) D g) K h) K i) D j) K k) K l) D m) D n) K
5. a) ne AK b) AK c) ne AK
6. a) K, ale ne absolutně b) D c) K, ale ne absolutně d) K, ale ne absolutně e) D f) K, ale ne absolutně g) K, ale ne absolutně
7. a) AK b) D c) K, ale ne absolutně d) K, ale ne absolutně
e) K, ale ne absolutně f) K, ale ne absolutně g) AK
8. a) AK b) D c) K, ale ne absolutně d) AK e) K