Kalkulus 2, ZS 2020-2021
Zadání písemné části zkoušky - termín 7.1.

Příklad 1 (15 bodů)**.** Je dána funkce

$$f(x,y) = \operatorname{arctg}(x) - x + \operatorname{arctg}(y) - y$$

na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [-1,2], y \in [-1,2], y + x \leq 1\}$. Vypočtěte globální extrémy f na M.
(Hint: $\operatorname{arctg}(-1) = -\operatorname{arctg}(1) = -\frac{\pi}{4} \doteq 0.79$, $\operatorname{arctg}(0.5) \doteq 0.46$, $\operatorname{arctg}(2) \doteq 1.11$)

Příklad 2 (10 bodů)**.** Ukažte, že funkce f zadaná předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \exp(\tfrac{x-1}{n} + 1)$$

je spojitá v bodě 1 (*hint: použijte k tomu Tvrzení z přednášky o záměně sumy a derivace*).

Příklad 3 (13 bodů)**.** Nechť je dána množina

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < z < 1,\ \sqrt{(x-1)^2 + 4y^2} \leq 1,\ -1 < \tfrac{2y}{x-1} < 0, x > 1\}$$

- Proč je množina M měřitelná?
- Proč je funkce $f(x,y,z) = \frac{x}{\sqrt{(x-1)^2+4y^2}}$, $(x,y,z) \in M$ měřitelná?
- Spočtěte integrál $\int_M f(x,y,z)\, \mathrm{d}\lambda^z$ (hint: použijte posunuté zobecněné válcové souřadnice tak, aby bylo $r = \sqrt{(x-1)^2 + 4y^2}$).

Příklad 4 (12 bodů)**.** Spočítejte následující Lebesgueův-Stieltjesův integrál ($[\cdot]$ značí celou část)

$$\int_{[1,5]} [x] x \, \mathrm{d}g(x), \qquad \text{kde } g(x) = \begin{cases} 3x^2 + 4x - 2, & x \in [1,2) \\ 1, & x = 2 \\ x - 2, & x \in (2,3] \\ -2x & x \in (3,5]. \end{cases}$$

Kalkulus 2, ZS 2020-2021
Zadání písemné části zkoušky - termín 14.1.

Příklad 5 (15 bodů)**.** Ukažte, že rovnice

$$\cos(x-y)+x-y+\log(y^2)=1$$

určuje v jisté okolí bodu $[1,1]$ implicitně zadanou funkci $y=f(x)$. Spočtěte $f'(1)$ a $f''(1)$.

Příklad 6 (12 bodů)**.** Nechť je funkce f dána předpisem

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big(1+\log(\tfrac{3}{4}+\tfrac{x}{2})\Big)^n.$$

- Nalezněte definiční obor funkce f (tj. určete pro která $x\in\mathbb{R}$ je $f(x)\in\mathbb{R}$, *hint: uvědomte si, že* $\log(\frac{1}{e^2})=-2$).
- Dokažte, že funkce f je spojitá v bodě 0.

Příklad 7 (11 bodů)**.** Nechť je dána množina

$M:=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\colon x>0, y<0,\ 0<\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}<\sin((x^2+y^2+z^2)^{3/2}),\ x^2+y^2+z^2\le(\frac{\pi}{3})^{2/3}\}.$

- Proč je množina M měřitelná?
- Spočtěte míru $\lambda^3(M)$ (hint: použijte sférické souřadnice).

Příklad 8 (12 bodů)**.** Nechť je dána funkce F předpisem

$$F(a)=\int_0^{\infty}\frac{e^{ax^2}-1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

- Dokažte, že $F(a)\in\mathbb{R}$ pro $a<0$.
- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a\in(-\infty,-\frac{1}{2})$ pomocí integrálu a příslušný integrál spočtěte (Hint: použijte "Laplaceův integrál $\int_0^{\infty}e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$" počítaný na přednášce). Dostanete tak hodnotu $F'(a)$ pro $a\in(-\infty,-\frac{1}{2})$.
- Nalezněte primitivní funkci k $F'(a)$. Bez důkazu použijte fakt, že $F(-1)=-\sqrt{\pi}$ a určete hodnotu integrálu $F(a)$ pro $a\in(-\infty,-\frac{1}{2})$.

Kalkulus 2, ZS 2020-2021
Zadání písemné části zkoušky - termín 20.1.

Příklad 9 (14 bodů)**.** Nalezněte lokální extrémy funkce

$$f(x,y)=\log(-x^3-y^2+6xy).$$

Příklad 10 (11 bodů)**.** Ukažte, že funkce f zadaná předpisem

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\cdot\cos\left(\tfrac{x-1}{n^2}+\tfrac{\pi}{4}\right)$$

je spojitá v bodě 1 (*hint: použijte k tomu Tvrzení z přednášky o záměně sumy a derivace*).
Dále dokažte, že funkce f má vlastní derivaci v bodě 2 a vyjádřete $f'(2)$ jako součet číselné řady.

Příklad 11 (13 bodů)**.** Nechť je dána množina

$$M:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\sqrt{\tfrac{x^2}{9}+(y+1)^2}\le 1,\ 0<\tfrac{3y+3}{x}<1, x>0\}$$

- Proč je množina M měřitelná?
- Proč je funkce $f(x,y)=(x-2)\cdot\cos\left(2\sqrt{\tfrac{x^2}{9}+(y+1)^2}\right)$, $(x,y)\in M$ měřitelná?
- Spočtěte integrál $\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}\lambda^2$ (hint: použijte posunuté zobecněné polární souřadnice tak, aby bylo $r=\sqrt{\tfrac{x^2}{9}+(y+1)^2}$).

Příklad 12 (12 bodů)**.** Nechť je dána funkce F předpisem

$$F(a)=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^4}\cdot\operatorname{arctg}\left(\tfrac{x}{a-1}\right)\mathrm{d}x.$$

- Dokažte, že $F(a)\in\mathbb{R}$ pro $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.
- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a\in(0,1)$ pomocí integrálu.
- Zjistěte, zda je funkce F na intervalu $(0,1)$ rostoucí/klesající.
- Spočtěte $\lim_{n\to\infty}F(n)$.

Kalkulus 2, ZS 2020-2021
Zadání písemné části zkoušky - termín 3.2.

Příklad 13 (14 bodů)**.** Je dána funkce

$$f(x,y) = \log(x) + \log(y)$$

na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 1, y \geq 1, x^2 + 4y^2 = 25\}$. Vypočtěte globální extrémy f na M.

Příklad 14 (11 bodů)**.** Nechť je funkce f dána předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{4}{\pi} \operatorname{arctg}(x-3)\Big)^n.$$

- Nalezněte definiční obor funkce f (tj. určete pro která $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \in \mathbb{R}$).
- Dokažte, že funkce f je spojitá v bodě 3.

Příklad 15 (14 bodů)**.** Nechť je dána množina

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon \big((x-2)^2 + \tfrac{y^2}{9} + z^2\big)^4 < (x-2)^2 + \tfrac{y^2}{9} - z^2, z > 0\}.$$

- Proč je množina M měřitelná?
- Proč je funkce $f(x,y,z) = \big((x-2)^2 + \frac{y^2}{9} - z^2\big)^{-3/8}$, $(x,y,z) \in M$ měřitelná?
- Spočtěte integrál $\int_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}\lambda^z$ (hint: použijte posunuté zobecněné sférické souřadnice tak, aby bylo $r = \sqrt{(x-2)^2 + \frac{y^2}{9} + z^2}$).

Příklad 16 (11 bodů)**.** Spočítejte následující Lebesgueův-Stieltjesův integrál ($[\cdot]$ značí celou část)

$$\int_{[-2,2]} f(x)\,\mathrm{d}([2x] - 2x), \qquad \text{kde } f(x) = \begin{cases} x+2, & x \in [-2,-1] \\ 1, & x \in (-1,0) \\ 100, & x = 0 \\ -x^2+7, & x \in (0,2]. \end{cases}$$

Kalkulus 2, ZS 2020-2021
Zadání písemné části zkoušky - termín 10.2.

Příklad 17 (14 bodů)**.** Ukažte, že rovnice

$$2\exp(x - \tfrac{1}{4}y) - x + \frac{y}{4} + \sqrt{3x + y^2} = \frac{5}{2}$$

určuje v jisté okolí bodu $[\frac{1}{16}, \frac{1}{4}]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(\frac{1}{16})$ a $f''(\frac{1}{16})$.

Příklad 18 (11 bodů)**.** Ukažte, že funkce f zadaná předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \log\Big(3 + \cos\Big(\frac{x-2}{n}\Big)\Big)$$

je spojitá v každém bodě $x \in \mathbb{R}$ (*hint: použijte k tomu Tvrzení z přednášky o záměně sumy a derivace*).

Příklad 19 (11 bodů)**.** Nechť je dána množina

$$M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon z\sqrt{x^2 + y^2} \leq 3,\ z > \sqrt{x^2 + y^2} + 2,\ y > 0\}.$$

- Proč je množina M měřitelná?
- Spočtěte míru $\lambda^3(M)$ (hint: použijte válcové souřadnice).

Příklad 20 (14 bodů)**.** Nechť je dána funkce F předpisem

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{(x^a - 1)e^{-x^2}}{\log x}\,\mathrm{d}x.$$

- Pomocí věty o derivaci integrálu závislém na parametru dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a > -\frac{1}{2}$ a vyjádřete $F'(a)$ pro $a > -\frac{1}{2}$ pomocí integrálu (Hint: integrovatelnou majorantu hledejte na intervalech tvaru $(-\frac{1}{2}, p)$ pro $p > 1$).
- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a > -\frac{1}{2}$ pomocí funkce Γ a zjistěte, zda platí $F'(4) > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
- Spočtěte

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{F'(n+1)\cdot(2e)^{n/2}}{\sqrt{n \cdot n^n}}$$

  (Hint: použijte Stirlingův vzorec).

Kalkulus 2, ZS 2020-2021
Zadání písemné části zkoušky - termín 25.2.

Příklad 21 (13 bodů)**.** Je dána funkce

$$f(x,y) = \exp(xy - y - 2x + 2)$$

na množině $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [0,3], y \in [1,4], y + x \leq 4\}$. Vypočtěte globální extrémy f na M.

Příklad 22 (12 bodů)**.** Nechť je funkce f dána předpisem

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(\tfrac{n}{8} \cdot (1 - 2x)).$$

- Nalezněte definiční obor funkce f (tj. určete pro která $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \in \mathbb{R}$, *hint: uvědomte si, že* $\exp(n.a) = \exp(a)^n$).
- Dokažte, že funkce f je spojitá v bodě 1.
- Dokažte, že funkce f má vlastní derivaci v bodě 2 a vyjádřete $f'(2)$ jako součet číselné řady.

Příklad 23 (11 bodů)**.** Nechť je dána množina

$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z \geq 1,\ x > 0,\ 0 < y < 2x \operatorname{tg}\left(\sqrt{4x^2 + y^2 + (z-1)^2}\right), \sqrt{4x^2 + y^2 + (z-1)^2} < \frac{\pi}{2}\}.$

- Proč je množina M měřitelná?
- Spočtěte míru $\lambda^3(M)$ (hint: použijte posunuté zobecněné sférické souřadnice tak, aby bylo $r = \sqrt{4x^2 + y^2 + (z-1)^2}$).

Příklad 24 (14 bodů)**.** Nechť je dána funkce F předpisem

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(ax)}{x^2} \cdot e^{-x} \, \mathrm{d}x.$$

- Dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a \in \mathbb{R}$.
- Ukažte, že pro každé $x \in (0, \infty)$ a $a \in \mathbb{R}$ platí $\frac{1-\cos(ax)}{x^2} \cdot e^{-x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(ax)^{2k}}{x^2} e^{-x}$.
- Ověřte možnost záměny řady a integrálu a vyjádřete integrál $F(1)$ jako číselnou řadu (Hint: můžete s výhodou použít znalosti o funkci Γ z přednášky).