I. OPAKOVÁNÍ - OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY, PARCIÁLNÍ DERIVACE

1. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené a určete vnitřek.
a) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ x < 0,\ y \geq 0\}$ b) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ \operatorname{arctg}(x+y) > \frac{1}{2}\}$ c) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ \operatorname{arctg}(x+y) > \frac{1}{2}, x \geq 0\}$

2. Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují

a) $\operatorname{arctg}(x^2y^3 + 2^x)$

3. Určete a nakreslete definiční obor funkce f a vyšetřete její parciální derivace
a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{y}}$

Další příklady k procvičení:

- **lehčí:** [1, příklady I.3.e-g; II.1.a-c] (u příkladů I.3 bez určování hranice a uzávěru)
- **normální:** [1, příklady I.3.h-k; II.1.d,h,i,j] (u příkladů I.3 bez určování hranice a uzávěru)
- **složitější:** [1, příklady I.3.l; II.1.e-g,k; II.2.a-f] (u příkladů I.3 bez určování hranice a uzávěru, u příkladů II.2 bez určování tečné nadroviny)

[1] materiály ke cvičení z Matematiky 2 (2015/16), umístěny na webu zde: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/examples.html`

I. OPAKOVÁNÍ - OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY, PARCIÁLNÍ DERIVACE - VÝSLEDKY

1. a) Množina není uzavřená ani otevřená. Vnitřek je $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ x < 0,\ y > 0\}$ b) Množina není uzavřená, je otevřená c) Množina není uzavřená ani otevřená, vnitřek $\{[x,y] : \ \operatorname{arctg}(x+y) > \frac{1}{2}, x > 0\}$
2. a) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{2xy^3 + \log 2 \cdot 2^x}{(x^2y^3+2^x)^2+1}$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3x^2y^2}{(x^2y^3+2^x)^2+1}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
3. a) $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y \geq -x^6\}$, pro $(x,y) \in D_f$ splňující $y \neq x^6$ máme $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+\sqrt[3]{y}}}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{6\sqrt{x^2+\sqrt[3]{y}}\sqrt[3]{y^2}}$ pro $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ neexistuje, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistuje a v ostatních bodech definičního oboru nemá smysl zbývající parciální derivace počítat

konec 1. přednášky (30.9.2020)

II. IMPLICITNÍ FUNKCE

1. Je dán vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0, 1]$. Dokažte, že:

i) tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$;

ii) spočtěte $f'(0)$;

iii) spočtěte $f''(0)$;

iv) zjistěte, zda je f na okolí bodu 0 konkávní/konvexní.

konec 2. přednášky (5.10.2020)

2. Ukažte, že daná rovnice určuje v jisté okolí bodu $M = [m_1, m_2]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(m_1)$ a $f''(m_1)$.

a) $e^{xy^2-1} + \log\frac{x}{y} = 1,\ M = [1, 1]$ b) $\cos(x + y^2) + \sin(x^2 + y) = 1,\ M = [-1, -1]$

c) $\log(x + y^3) + \exp(x + 2y) = 1,\ M = [2, -1]$

Další příklady k procvičení:

- příklady z oddílu III.2 ke cvičení z Matematiky 2 (2015/16) umístěny na webu zde: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/examples.html`
- příklady 1-10 z materiálů doc. Zeleného dostupné na odkazu zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/mff/MA_3/Implicitni_funkce.pdf`

II. IMPLICITNÍ FUNKCE - VÝSLEDKY

1. $f'(0) = 2,\ f''(0) = -14$, funkce je na okolí bodu 0 konkávní

2. viz. výsledky zkouškových písemek zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`

konec 3. přednášky (7.10.2020)

III. EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

1. U následujících funkcí nalezněte lokální extrémy.
a) $f(x,y) = x^2 + (y-1)^2$ b) $f(x,y) = |x^2 + y^2 - 1|$ c) $f(x,y) = e^{x^2-y}(5 - 2x + y)$
d) $f(x,y) = xy\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $(x,y) \in \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$ **konec 4. přednášky (12.10.2020)**

2. Zjistěte sup **a** inf **funkce** f **na množině** M **a vyšetřete, zda těchto hodnot funce** f **na** M **nabývá (bez Lagrangeových multiplikátorů).**

a) $f(x,y) = x - 2y - 3$; $M = \{[x,y]; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x + y \le 1\}$
b) $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z$; $M = \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$
c) $f(x,y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$, $M = \{[x,y], x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$
d) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$; $M = \{[x,y]; |x| + |y| \le 1\}$ (příklad se na přednášce nestihl, můžete jej spočítat jako užitečné cvičení samostatně) **konec 5. přednášky (14.10.2020)**

3. Nalezněte maxima a minima funkce f **na množině** M **(s Lagrangeovými multiplikátory).**

a) $f(x,y) = 5x - 3y$, $M = \{[x,y], x^2 + y^2 = 136\}$ b) $f(x,y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y$, $M = \{[x,y], x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}$
c) $f(x,y) = xy$, $M = \{[x,y], 3x^2 + y^2 = 6\}$ (příklad se na přednášce nestihl, můžete jej spočítat jako užitečné cvičení samostatně)

4. Při jakých rozměrech bude mít otevřená nádoba tvaru kvádru daného objemu V minimální povrch?

5. Dané kladné číslo a rozložte na součet dvou čísel x a y tak, že součet jejich druhých mocnin je minimální.

6. Dokažte nerovnost $\frac{x^n + y^n}{2} \ge \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$ pro $n \ge 1$, $x \ge 0$ a $y \ge 0$.

7. Pro $M \subset \mathbb{R}^2$ a $x \in \mathbb{R}^2$ je vzdálenost bodu $\mathbf{x}$ od M definována jako $\inf\{\rho(\mathbf{x}, \mathbf{m}), \mathbf{m} \in M\}$. Určete vzdálenost bodu $[a, \frac{1}{2}]$ od paraboly $y = x^2$. (příklad se na přednášce nestihl, můžete jej spočítat jako užitečné cvičení samostatně)

konec 6. přednášky (19.10.2020)

Další příklady k procvičení:

- příklady z oddílu IV.1 ke cvičení z Matematiky 2 (2015/16) umístěny na webu zde: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/examples.html`
- příklady 1-10, 11, 17-20, 22, 24, 28-37 z materiálů doc. Zeleného dostupné na odkazu zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~zeleny/mff/MA_3/Extremy.pdf`

III. EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH - VÝSLEDKY

1. a) $[0,1]$ - ostré lokální minimum b) $[0,0]$ - ostré lokální maximum, $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 = 1\}$ jsou body lokálního minima (ale ne ostrého) c) $[1,-2]$ - není extrém (sedlový bod) d) $[\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ jsou ostrá lokální maxima, $[\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}]$ a $[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$ jsou ostrá lokální minima, ve stacionárním bodě $[0,0]$ není lokální extrém
2. a) max -2 v bodě $[1,0]$, min -5 v bodě $[0,1]$ b) max 5 v bodech $[\pm1, \pm1, 1]$, min -1 v bodě $[0,0,-1]$ c) max v $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, min v $[0,0]$ d) max 1 v bodech $[\pm1, 0]$, $[0, \pm1]$, min 0 v bodě $[0,0]$
3. a) max 68 v $[10,-6]$, min -68 v $[-10,6]$ b) max v $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$, min v $[0,0]$ c) max $\sqrt{3}$ v $[1,\sqrt{3}]$ a $[-1,-\sqrt{3}]$, min $-\sqrt{3}$ v $[1,-\sqrt{3}]$ a $[-1,\sqrt{3}]$
4. Rozměry nádoby jsou $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{2V}$, $\sqrt[3]{\frac{V}{4}}$ **5.** $x = y = \frac{a}{2}$
6. Hint: najděte minimum funkce $f(x,y) = \frac{x^n + y^n}{2}$ za podmínky $x + y = c$. **7.** $\sqrt{a^2 - \frac{3}{4}\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{a} + \frac{1}{4}}$

IV. STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE POSLOUPNOSTÍ A ŘAD FUNKCÍ

1. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci posloupnosti funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, kde $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$

2. Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou konvergenci následujících řady funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, kde $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

konec 7. přednášky (21.10.2020)

3. Dokažte, že funkce f daná předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin(1 + \frac{x}{n})}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R}$$

je spojitá na svém definičním oboru a spočtěte $f'(0)$.

4. Dokažte, že pro funkci $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in (1, \infty)$ platí $f \in \mathcal{C}^1((1, \infty))$.

5. Dokažte, že pro funkci f danou předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2 + x^2}, \quad x \in [-1, 1]$$

platí $f \in \mathcal{C}([-1, 1])$. Spočtěte $f'(\frac{1}{2})$ a $f'(0)$.

6. Nechť je funkce f dána předpisem

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-x^2 + 6x - 8)^n.$$

Nalezněte definiční obor funkce f (tj. určete pro která $x \in \mathbb{R}$ je $f(x) \in \mathbb{R}$). Dokažte, že funkce f je spojitá v bodě $7/2$. Dokažte, že funkce f má vlastní derivaci v bodě $7/2$ a vyjádřete $f'(7/2)$ jako součet číselné řady.

7. (***Příklad se na přednášce nestihl, můžete jej spočítat jako užitečné cvičení samostatně***) Nechť je dána posloupnost funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ předpisem

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{|x + \frac{1}{n^2}| - |x - \frac{1}{n^2}|}{|x + \frac{1}{n^2}| + |x - \frac{1}{n^2}|}, \quad x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}.$$

Rozhodněte, zda řada funkcí $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ stejnoměrně konverguje na $\mathbb{R}$
(Hint: rozepište si předpis funkce bez absolutních hodnot pro $x < -1/n^2$, $x \in [-1/n^2, 1/n^2]$ a pro $x > 1/n^2$).
Dokažte, že funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je spojitá v bodě 3. Dokažte, že funkce $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ je klesající na intervalu $(2, \infty)$.

Další příklady k procvičení:

- příklady 13.61 - 13.70 ze sbírky Ilja Černý: Inteligentní kalkulus. Online zde: `http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html`

IV. STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE POSLOUPNOSTÍ A ŘAD FUNKCÍ - VÝSLEDKY

1. posloupnost bodově konverguje k funkci $f(x) = 0$ pro $x \in [0, 1)$ a $f(x) = 1$ pro $x = 1$, posloupnost není stejnoměrně konvergentní **2.** řada funkcí je stejnoměrně konvergentní
3. $f'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos 1}{n^{3/2}}$ **5.** $f'(1/2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16n^2-4}{(4n^2+1)^2}$, $f'(0)$ neexistuje
6. definiční obor je $(3 - \sqrt{2}, 3) \cup (3, 3 + \sqrt{2})$, $f'(7/2) = 5 \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot (3/4)^{n-1}$
7. řada je stejnoměrně konvergentní na $\mathbb{R}$.

konec 8. přednášky (26.10.2020)

V. MOCNINNÉ ŘADY

1. Nalezněte poloměr konvergence následujících mocninných řad. Určete oblasti absolutní konvergence, neabsolutní konvergence a divergence. a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^7}{n+20} x^n$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} x^n$ ($p \in \mathbb{R}$)
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3+(-1)^n)^n}{n} x^n$
e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{a^n+b^n}$ ($a, b > 0$) (*Příklad se na přednášce nestihl, můžete jej spočítat jako užitečné cvičení samostatně*)

2. Vyjádřete následující funkce jako mocninnou řadu o středu 0:
a) e^{-x^2} b) $(1+x)\log(1+x)$
c) $\operatorname{arctg}\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right)$ (*Příklad se na přednášce nestihl, můžete jej spočítat jako užitečné cvičení samostatně*)

konec 9. přednášky (2.11.2020)

3. Sečtěte řady všude na intervalu konvergence:
a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+5}}{n!}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

4. Sečtěte řady:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2n+3}{(n+1)2^n}$

5. Nalezněte maximální řešení následujících diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou:
a) $y'(x) = 3y(x/2)$, $y(0) = 1$

konec 10. přednášky (4.11.2020)

Další příklady k procvičení:

- příklady II.1.c,d,g,h; II.5; VI.1. a VI.2. ke cvičení z Matematické analýzy 2 (2016/17) umístěny na webu zde: `https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/examples.html`

V. MOCNINNÉ ŘADY - VÝSLEDKY

1. a) $R = 1$, AK pro $|x| < 1$ a D jinak b) R=1; pokud $p > 1$ pak AK pro $|x| \leq 1$ a D jinak; pokud $p \in (0, 1]$ pak AK pro $|x| < 1$, K pro $x = -1$ a D pro $x = 1$; pokud $p \leq 0$, pak AK pro $|x| < 1$ a D jinak c) R=1/3, AK pro $|x+1| < R$, K pro $x = -4/3$, D pro $x = -2/3$ d) R $= 1/4$, AK pro $|x| < R$, jinak D e) R=$\max\{a, b\}$, AK pro $|x| < R$, jinak D
2. a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$ b) $x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$ c) $\operatorname{arctg} 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{2n-1} x^{2n-1}$, $|x| < 1/2$
3. a) $x^5 e^{x^4}$, $x \in \mathbb{R}$ b) $\frac{x}{(x-1)^2}$, $x \in (-1, 1)$ c) $\log(\frac{1-x}{x}) - \log(1-x) + 1$, $x \in [-1, 1] \setminus \{0\}$, součet je 0 pro $x = 0$
4. a) $-\log 2$ b) 2 c) $-2\log(\frac{2}{3}) - \frac{5}{3}$
5. a) $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n! 2^{1+\dots+n}} x^n$, $x \in \mathbb{R}$

konec 11. přednášky (9.11.2020) **konec 12. přednášky (11.11.2020)**

konec 13. přednášky (16.11.2020)

TEORIE MÍRY

Doporučený zdroj informací a příkladů (i řešených) k teorii míry je především

[1] Sbírka příkladů (i řešených) z teorie míry: Lukeš - Příklady k teorii Lebesgueova integrálu.
Online zde: `http://matematika.cuni.cz/lukes-pli.html`

Další zdroje příkladů (často obsahují výběr příkladů ze sbírky výše):

[2] Materiály ke cvičením z teorie míry a integrálu (2013/14) na MFF.
K nalezení zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/examples.html`

[3] Materiály ke cvičením z Kalkulu 3 od Kristýny Kuncové.
K nalezení zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie08.php`
[4] Materiály ke cvičením z Teorie míry od Kristýny Kuncové.
K nalezení zde: `https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie12.php`

Níže specifikuji vždy nějaký výběr příkladů ze zdrojů výše, který považuji za vhodný pro další domácí počítání.

V. VÍCEROZMĚRNÁ INTEGRACE

1. Pomocí Fubiniovy věty spočtěte míru $\lambda^2(M)$ množiny M: a) M je omezená křivkami $x = 2$, $y = x$, $xy = 1$
b) M je omezená křivkami: $2x - y = 0$, $2x - y - 7 = 0$, $x - 4y + 7 = 0$, $x - 4y + 14 = 0$
c) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x > 2, 0 < y < 1/x\}$

2. Pomocí Fubiniovy věty spočtěte $\int_{[3,4]\times[1,2]} \frac{1}{(x+y)^2}\,\mathrm{d}\lambda^2$

3. Popište množinu $M \subset \mathbb{R}^2$ jejíž obsah je dán vzorcem $\int_0^2 \int_{y^2}^4 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, vyjádřete obsah množiny jako integrál kde x je vnější proměnná a výpočtem ověřte platnost Fubiniovy věty

4. Spočtěte integrál $\int_0^3 \int_y^3 e^{x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

5. Spočtěte míru $\lambda^3(M)$ množiny M: a) M je omezená plochou $z = e^{-x^2}$ a rovinami $y = 0$, $y = x$, $x = 1$
b) M je omezená plochami $z = 6x^2 - 2xy$, $y = 3x - x^2$ a $y = x$

Další příklady k procvičení: [1, úlohy 5.26, 5.28-5.30, 5.32-5.38, 5.42, 5.43] případně užší výběr příkladů z [2, úlohy IV.1-2 (pozor - IV.2e a IV.2f jsou technicky náročnější)]; další vhodný zdroj příkladů je [4, příklady 2. a 3. z odkazu "10. Fubinka"]

konec 14. přednášky (18.11.2020)

6. Spočtěte $\int\int_M f(x, y)\,\mathrm{d}\lambda^2$: a) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$; $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$
b) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{x}{\sqrt{3}} \leq y \leq 2x, x \leq x^2 + y^2 \leq 3x\}$; $f(x, y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^2}$
c) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1\}$; $f(x, y) = x^2 + y^2$ (*Příklad se na přednášce nestihl, můžete jej spočítat jako užitečné cvičení samostatně*)

7. Spočtěte míru $\lambda^2(M)$ množiny M:
a) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ ($a, b > 0$, jedná se o obsah elipsy)
b) $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 \leq 2a^2(x^2 - y^2)\}$ ($a > 0$, jedná se o obsah plochy ohraničené lemniskátou)

konec 15. přednášky (23.11.2020)

Další příklady k procvičení: [1, úlohy 5.26, 5.28-5.30, 5.32-5.38, 5.42, 5.43] případně užší výběr příkladů z [2, úlohy IV.1-2 (pozor - IV.2e a IV.2f jsou technicky náročnější)]; další vhodné zdroje příkladů jsou [3, příklady na 2D integrál kromě příkladu 7] a [4, příklady z odkazu "11. Substituce" kromě příkladů 4,6,11,12]

8. Spočtěte míru $\lambda^3(M)$ množiny M: (v úlohách uvažujte všechny parametry kladné)
a) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2+z^2} \leq R\}$ ($R > 0$, objem koule)
b) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq 2az, x^2+y^2 \leq z^2\}$
c) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ x^2+y^2 \leq Rx\}$ (objem Vivianiho okénka)
d) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : (R-\sqrt{x^2+y^2})^2+z^2 \leq a^2\}$, $R > a$ (objem anuloidu)

konec 16. přednášky (25.11.2020)

e) $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{3} \leq \frac{1}{x^2+2x+3}\}$

9. Spočtěte $\int\int\int_M z^2 \,\mathrm{d}\lambda^3$, kde $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ x^2+y^2+z^2 \leq 2Rz\}$ ($R > 0$)

10. Dokažte, že $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$ (tzv. Laplaceův integál, dále jej budeme považovat za „známý integrál)

Další příklady k procvičení: [2, úlohy IV.6 e,f (pozor - IV.6e je technicky náročnější) a IV.7.b,c,d]; další vhodné zdroje příkladů jsou [3, příklady 4-12 z odkazu "3. 3D integrál"]

V. VÍCEROZMĚRNÁ INTEGRACE - VÝSLEDKY

1. a) $3/2 - \log 2$ b) 7 c) $+\infty$ **2.** a) $\log\frac{25}{24}$
3. M je ohraničena křivkami $x = 4$, $y = 0$ a $y^2 = x$, máme $\int_0^2\int_{y^2}^4 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^4\int_0^{\sqrt{x}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \frac{16}{3}$
4. $\frac{1}{2}(e^9-1)$ **5.** a) $\frac{1}{2}(1-\frac{1}{e})$ b) $\frac{16}{3}$ **6.** a) 2π b) $\frac{4}{9}\left(2-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ c) $\frac{39}{2}\pi$ **7.** a) $ab\pi$ b) $2a^2$
8. a) $\frac{4}{3}\pi R^3$ b) $a^3\pi$ c) $\frac{2}{3}R^3(\pi-\frac{4}{3})$ d) $2\pi^2 Ra^2$ e) $\pi^2\sqrt{3}$
9. $\pi R^5\frac{59}{480}$

konec 17. přednášky (30.11.2020)

VI. LEBESGUEŮV-STIELTJESŮV INTEGRÁL

1. Spočítejte hodnotu Lebesgueova-Stieltjesova integrálu $\int_M f(x)\,\mathrm{d}g(x)$ pro zadané funkce $f, g : M \to \mathbb{R}$ a množiny M:

a) $M = [2,3],\ f(x) = x^2, g(x) = \chi_{[2,\infty)}(x)$ b) $M = [0,\infty),\ f(x) = e^x,\ g(x) = (3 - e^{-2x})\chi_{[0,\infty)}(x)$

c) $M = [1,3],\ f(x) = \begin{cases} x & x \neq 2 \\ 1 & x = 2 \end{cases},\ g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$

d) $M = [-1,1],\ f(x) = \begin{cases} x & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases},\ g(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x+1 & x \geq 0 \end{cases}$

e) $M = [0,3),\ f(x) = x^2,\ g(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ x^2 - 2x + 2 & x \in [1,2) \\ 3 & x = 2 \\ x+2 & x > 2 \end{cases}$

f) $f(x) = \begin{cases} e^{-2x} & x \leq 1 \\ x & x > 1 \end{cases},\ g(x) = \begin{cases} e^{3x} & x \leq 0 \\ 2 & x \in (0,1) \\ 2x+1 & x \geq 1 \end{cases}$, za M uvažujte postupně následující množiny

(i) $M = (-1,0)$, (ii) $M = [-1,0]$ (iii) $M = (-1,1)$ (iv) $M = (-1,1]$ (v) $M = [1,3]$ (vi) $M = (-\infty,0)$

konec 18. přednášky (2.12.2020)

g) $M = [0,5],\ f(x) = x^2 + 1,\ g(x) = [x]$ (celá část)

Následující příklady se nestihly spočítat na přednášce a jsou doporučeny studentům k procvičení:

h) $M = [0,5],\ f(x) = e^x,\ g(x) = x + [x]$

i) $M = [\frac{1}{4}, \frac{5}{4}],\ f(x) = [x],\ g(x) = [2x]$ j) $M = [\frac{1}{4}, \frac{5}{4}],\ f(x) = [2x],\ g(x) = [x]$

VI. LEBESGUEŮV-STIELTJESŮV INTEGRÁL - VÝSLEDKY

1. a) 4 b) 4 c) 4 d) 1 e) $\frac{109}{6}$

f) (i) $3(1 - e^{-1})$ (ii) $4 - 3e^{-1}$ (iii) $4 - 3e^{-1}$ (iv) $4 - 3e^{-1} + e^{-2}$ (v) $e^{-2} + 8$ (vi) 3

g) 61 h) $e + e^2 + e^3 + e^4 + 2e^5$ i) 1 j) 2

VII. KONVERGENCE INTEGRÁLU

1. Určete, zda Lebesgueovy integrály existují a zda jsou konvergentní (s parametry $p, q, s \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

a) $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^1 \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_{1/2}^1 \sqrt{\frac{1}{|\log x|}}\,\mathrm{d}x$

výsledky následujících příkladů budeme dále považovat za „známé integrály"

e) $\int_2^\infty \frac{1}{x^p(\log x)^q}\,\mathrm{d}x$ f) $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^p|\log x|^q}\,\mathrm{d}x$ g) $\int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}(\log x)^k\,\mathrm{d}x$

konec 19. přednášky (7.12.2020)

h) $\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$

další příklady na konvergenci integrálů

i) $\int_0^1 \frac{\log(1-p^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\tan x)^p\,\mathrm{d}x$

Další příklady k procvičení: [1, úlohy III.3.33-3.36] případně užší výběr příkladů z [2, úlohy I.1 a I.2 (některé spočítané na přednášce - viz. výše)]; další vhodný zdroj příkladů je [4, příklady z odkazů "1. Opakování AK" a "2. Opakování AK II"]

VII. KONVERGENCE INTEGRÁLU - VÝSLEDKY

1. a) K b) K c) existuje, ale nekonverguje d) K e) existuje vždy, konverguje pokud $p > 1$ a $q \in \mathbb{R}$, nebo $p = 1$ a $q > 1$ f) existuje vždy, konverguje pokud $p < 1$ a $q \in \mathbb{R}$, nebo $p = 1$ a $q > 1$ g) existuje vždy, konverguje pokud $s \in (0, \infty)$ a $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ jinak diverguje h) existuje vždy, konverguje pokud $p > 0$ a $q > 0$ i) konverguje pokud $p \in [-1, 1]$, jinak neexistuje j) existuje vždy, konverguje pokud $p \in (-1, 1)$

VIII. INTEGRACE POSLOUPNOSTÍ A ŘAD FUNKCÍ

1. Spočtěte následující limity: a) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \tfrac{x^n}{n}\,\mathrm{d}x$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \tfrac{nx}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1+n^2x^2}$
d) $\lim\limits_{a\to\infty}\displaystyle\int_0^\infty e^{-ax^2}\,\mathrm{d}x$

konec 20. přednášky (9.12.2020)

Další příklady k procvičení: [2, úlohy II.1 a II.2 (některé spočítané na přednášce - viz. výše)]; další vhodný zdroj příkladů je [4, příklady z odkazů "3. Limita a integrál" a "4. Limita a integrál"]

2. V následujících příkladech rozviňte integrovanou funkci v řadu, ověřte možnost záměny řady a integrálu a vyjádřete integrál jako číselnou řadu.
a) $\int_0^1 \frac{\log(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x$ b) $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$ c) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$ d) $\int_0^\infty e^{-x}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$ e) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$ $(p,q>0)$ f) $\int_0^\infty \frac{1}{e^{8x}+1}\,\mathrm{d}x$

Další příklady k procvičení: [2, úlohy II.3 (některé spočítané na přednášce - viz. výše)]; další vhodný zdroj příkladů je [4, příklady z odkazů "5. Řada a integrál"]

VIII. INTEGRACE POSLOUPNOSTÍ A ŘAD FUNKCÍ - VÝSLEDKY

1. a) 0 b) 0 c) 0 d) 0
2. a) $-\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2}$ b) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$ c) $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2}$ d) $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}$ e) $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{p+nq}$ f) $\sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{1}{8(n+1)} \overset{(e)}{=} \frac{\log 2}{8}$

konec 21. přednášky (14.12.2020)

VIII. INTEGRÁLY ZÁVISLÉ NA PARAMETRU

1. Určete definiční obor následujících reálných funkcí (= množinu všech $a \in \mathbb{R}$, že $F(a) \in \mathbb{R}$) a dokažte, že jsou na svém definičním oboru spojité.

a) $F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ b) $F(a) = \int_0^\infty e^{-ax}\,\mathrm{d}x$ c) $F(a) = \int_{-1}^1 \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$ (tento příklad se na přednášce nestihl)
d) $F(a) = \int_0^1 \log(x^2+a^2)\,\mathrm{d}x$ (spojitost v nule se na přednášce nestihla)

konec 22. přednášky (16.12.2020)

2. Načrtněte grafy funkce $F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax^2}}{1+x^2}$ (tj. spočtěte první a druhou derivaci, určete monotonii a konvexitu-konkávitu + limity v krajních bodech definičního oboru)

3. Rozhodněte, pro které hodnoty parametrů konverguje Lebesgueův integrál $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1-e^{-ax}}{xe^x}\,\mathrm{d}x.$

konec 23. přednášky (21.12.2020)

Spočtěte jeho hodnotu pomocí věty o derivování integrálů závislých na parametru.

Další příklady z této sekce se na přednášce nestihly (doporučuji ale studentům si je spočítat - buď v rámci cvičení, nebo samostatně).

4. Uvažujme funkci F zadanou předpisem

$$F(a) := \int_1^\infty \frac{\cos(\frac{x}{a})}{\sqrt{x^7}}\,\mathrm{d}x, \qquad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

- Dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- Dokažte, že funkce F je spojitá na svém definičním oboru.
- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.
- Spočtěte $\lim_{a\to+\infty} F(a)$.

5. Uvažujme funkci F zadanou předpisem

$$F(a) := \int_0^\infty e^{-8x}\frac{1-\cos ax}{x}\,\mathrm{d}x, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

- Dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a \in \mathbb{R}$.
- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a \in \mathbb{R}$ pomocí integrálu a příslušný integrál spočtěte. Dostanete tak hodnotu $F'(a)$ pro $a \in \mathbb{R}$.
- Nalezněte primitivní funkci k $F'(a)$ a určete hodnotu integrálu $F(a)$ pro $a \in \mathbb{R}$.

6. Uvažujme funkci F zadanou předpisem

$$F(a) := \int_0^\infty \frac{\exp(-a(x+1))}{x+1}(2x+1)\,\mathrm{d}x, \qquad a \in (0,\infty).$$

- Dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a \in (0, \infty)$.
- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a \in (0, \infty)$ pomocí integrálu a vyšetřete monotonii funkce F na $(0, \infty)$.
- Vyjádřete $F''(a)$ pro $a \in (0, \infty)$ pomocí integrálu, vyšetřete konvexitu/konkávitu funkce F na $(0, \infty)$.

Pozn: Můžete bez důkazu používat, že pro každý polynom P a každé $C > 0$ je integrál $\int_0^\infty P(x)\exp(-Cx)\,\mathrm{d}x$ konvergentní

7. Uvažujme funkci F zadanou předpisem

$$F(a) := \int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^x - 1}\,\mathrm{d}x, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

- Dokažte, že $F(a) \in \mathbb{R}$ pro $a \in \mathbb{R}$.
- Vyjádřete $F'(a)$ pro $a \in (0, \infty)$ pomocí integrálu.
- Ukažte, že pro každé $x \in (0, \infty)$ a $a \in \mathbb{R}$ platí $\frac{\sin ax}{e^x - 1} = \sin(ax)e^{-x}\sum_{n=0}^\infty e^{-nx}$.
- Ověřte možnost záměny řady a integrálu a vyjádřete pro každé $a \in \mathbb{R}$ integrál $F(a)$ jako číselnou řadu.

VIII. INTEGRÁLY ZÁVISLÉ NA PARAMETRU - VÝSLEDKY

1.definiční obory: a) $[0, \infty)$ b) $(0, \infty)$ c) $\mathbb{R}$ d) $\mathbb{R}$
2. bude ukázáno na přednášce
3. $\log(a+1),\ a \in (-1, \infty)$
4. $F'(a) = \int_1^\infty \frac{\sin(\frac{x}{a})}{\sqrt{x^5}a^2}\,\mathrm{d}x$, $\lim_{a\to\infty} F(a) = \frac{2}{5}$.
5. $F'(a) = \frac{a}{64+a^2}$, $F(a) = \frac{1}{2}(\log(64+a^2) - \log 64)$.
6. $F'(a) = -\int_0^\infty (2x+1)\exp(-a(x+1))\,\mathrm{d}x$, F klesá na $(0, \infty)$, $F''(a) = \int_0^\infty (2x+1)(x+1)\exp(-a(x+1))\,\mathrm{d}x$, F je konvexní na $(0, \infty)$.
7. $F'(a) = \int_0^\infty \frac{x\cos(ax)}{e^x-1}\,\mathrm{d}x$, $F(0) = 0$, $F(a) = \sum_{n=0}^\infty \frac{a}{a^2+(n+1)^2}$ pro $a \neq 0$.

IX. POČÍTÁNÍ INTEGRÁLŮ POMOCÍ FUNKCÍ Γ A B

1.Dokažte platnost následujících vzorců: (tyto vzorce můžete používat v dalších příkladech)
a) $B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} \cos^{2p-1} x \sin^{2q-1} x \, \mathrm{d}x$ b) $B(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} \, \mathrm{d}x$

2. Spočtěte hodnotu následujících integrálů: a) $\int_0^{\infty} x^4 e^{-x^2} \, \mathrm{d}x$ b) $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x \cos^6 x \, \mathrm{d}x$
c) $\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x^n} \, \mathrm{d}x$ $(0 < p < n,\ n \in \mathbb{N})$ d) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} \, \mathrm{d}x$ e) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{px}}{1+e^{nx}}$ $(0 < p < n,\ n \in \mathbb{N})$

IX. POČÍTÁNÍ INTEGRÁLŮ POMOCÍ FUNKCÍ Γ A B - VÝSLEDKY

2. a) $\frac{3}{8}\sqrt{\pi}$ b) $\frac{3}{2^9}\pi$ c) $\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi p}{n}}$ d) $\frac{(\Gamma(1/4))^2}{4\sqrt{2\pi}}$ e) $\frac{\pi}{n \sin \frac{\pi p}{n}}$

X. APLIKACE STIRLINGOVA VZORCE

1. Spočítejte limity a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}}$

konec 24. přednášky (4.1.2021)

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda^n(B(0,1))$

X. APLIKACE STIRLINGOVA VZORCE - VÝSLEDKY

1. a) 4 b) 0

konec 25. přednášky (6.1.2021)