I. Topologické vektorové prostory

1. Základní vlastnosti

Definice 1. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a τ je topologie na X. Pokud jsou operace sčítání a násobení skalárem spojité jakožto zobrazení $+: X \times X \to X$ a $\cdot: \mathbb{K} \times X \to X$, nazveme dvojici (X, τ) *topologickým vektorovým prostorem* (TVS). Hausdorffův TVS značíme HTVS.

Systém všech okolí bodu $x \in X$ značíme $\tau(x)$.

Definice 2. Nechť X je vektorový prostor nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Množina A se nazývá

- *vyvážená*, pokud $\alpha A \subset A$ pro každé $\alpha \in \mathbb{K}$, $|\alpha| \leqslant 1$;
- *absolutně konvexní*, pokud A je konvexní a vyvážená;
- *pohlcující*, pokud pro každé $x \in X$ existuje $\lambda_x > 0$ takové, že $tx \in A$ pro každé $t \in [0, \lambda_x]$.

Absolutně konvexní obal množiny A definujeme jako

$$\operatorname{aconv} A = \bigcap \{B \supset A;\ B \subset X \text{ je absolutně konvexní}\}.$$

Definice 3. Řekneme, že topologický vektorový prostor je *lokálně konvexní* (LCS), pokud v něm existuje báze okolí 0 tvořená konvexními množinami. Hausdorffův LCS značíme HLCS.

Tvrzení 4. *Nechť X je TVS a $U \in \tau(0)$.*

(a) U je pohlcující.

(b) Existuje $V \in \tau(0)$ otevřená a vyvážená splňující $V + V \subset U$.

(c) Je–li U konvexní, existuje $V \in \tau(0)$ otevřená a absolutně konvexní splňující $V + V \subset U$;

Konec 1. přednášky

Věta 5. *Nechť X je TVS.*

(a) X je regulární (tj. lze oddělit bod a uzavřenou množinu pomocí otevřených množin).

(b) Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) X je Hausdorffův.
(ii) X je T_1 (tj. body jsou uzavřené množiny).
(iii) $\{0\}$ je uzavřená množina.
(iv) $\{0\} = \bigcap\{U;\ U \in \tau(0)\}$.

Poznámka: dokonce platí, že každý TVS je úplně regulární (dokonce obecněji: každá topologická grupa je úplně regulární).

Věta 6 (John von Neumann (1935))**.** *Nechť X je vektorový prostor a $\mathcal{U}$ je systém podmnožin X obsahujících 0, který je bází filtru (tj. pro každá $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$ existuje $U \in \mathcal{U}$ splňující $U \subset U_1 \cap U_2$). Předpokládejme, že $\mathcal{U}$ má následující vlastnosti:*

(i) Pro každé $U \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{U}$ splňující $V + V \subset U$.

(ii) Každá množina z $\mathcal{U}$ je pohlcující a vyvážená.

Pak existuje právě jedna topologie τ na X taková, že (X, τ) je TVS a $\mathcal{U}$ je báze okolí 0. Jsou–li prvky $\mathcal{U}$ absolutně konvexní, pak (X, τ) je LCS. Pokud navíc $\bigcap \mathcal{U} = \{0\}$, pak je (X, τ) Hausdorffův.

2. Topologie generované pseudonormami, Minkowského funkcionál

Nechť X je vektorový prostor, $p_1, \ldots, p_n$ jsou pseudonormy na X a $\varepsilon > 0$. Označme

$$U_{p_1,\ldots,p_n,\varepsilon} = \{x \in X;\ p_1(x) < \varepsilon, \ldots, p_n(x) < \varepsilon\}.$$

Pokud X je vektorový prostor a $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem na X, pak *topologie generovaná $\mathcal{P}$* je nejmenší topologie τ taková, že pro každé $p \in \mathcal{P}$ je $p : (X, \tau) \to [0, \infty)$ spojitá. Pak systém $\mathcal{S} = \{U_{p,\varepsilon};\ p \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ pak tvoří subbázi okolí 0, systém $\mathcal{U} = \{U_{p_1,\ldots,p_n,\varepsilon};\ n \in \mathbb{N}, p_1, \ldots, p_n \in \mathcal{P}, \varepsilon > 0\}$ tvoří bázi okolí 0 a net $\{x_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma} \subset X$ konverguje k $x \in X$ v τ právě tehdy, když $p(x_\gamma - x) \to 0$ pro každou $p \in \mathcal{P}$.

Věta 7. *Nechť X je vektorový prostor a τ topologie na X. Pak (X, τ) je LCS, právě když τ je generována systémem pseudonorem.*

Navíc, pokud je τ je generována systémem pseudonorem $\mathcal{P}$, pak (X, τ) je Hausdorffův, právě když pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ existuje $p \in \mathcal{P}$ splňující $p(x) > 0$.

Konec 2. přednášky

Definice 8. Nechť X je vektorový prostor a $f\colon X \to \mathbb{R}$. Řekneme, že f je *nezáporně homogenní*, jestliže $f(tx) = tf(x)$ pro každé $t \geqslant 0$.

Definice 9. Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. *Minkowského funkcionál* množiny A je funkce $\mu_A\colon X \to [0, +\infty)$ definovaná předpisem

$$\mu_A(x) = \inf\{\lambda > 0;\ x \in \lambda A\}.$$

Věta 10 (Základní vlastnosti Minkowského funkcionálu)**.** *Nechť X je vektorový prostor a $A \subset X$ je pohlcující. Pak platí následující tvrzení:*

(a) μ_A je nezáporně homogenní.

(b) Je-li A konvexní, je μ_A nezáporný sublineární funkcionál.

(c) Je-li A absolutně konvexní, je μ_A pseudonorma.

(d) Je-li A konvexní, pak $\{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leqslant 1\}$.

Definice 11. Nechť (X, τ_X), (Y, τ_Y) jsou TVS a $f\colon X \to Y$. Řekneme, že f je *stejnoměrně spojité*, jestliže pro každé $V \in \tau_Y(0)$ existuje $U \in \tau_X(0)$ takové, že pro každé $x, y \in X$ platí, že $f(x) \in f(y) + V$ kdykoliv $x \in y + U$.

Lemma 12. *Nechť X je TVS a p je sublineární funkcionál na X. Pak p je stejnoměrně spojitý, právě když je shora omezený na nějakém okolí 0.*

Tvrzení 13. *Nechť X je TVS a $A \subset X$ je pohlcující konvexní množina. Pak μ_A je spojitý, právě když A je okolím 0. V tom případě pak platí, že*

$$\operatorname{Int} A = \{x \in X;\ \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X;\ \mu_A(x) \leqslant 1\} = \overline{A}.$$

Důsledek 14. *Každý LCS je úplně regulární.*

Tvrzení 15. *Je-li (X, τ) LCS a $\mathcal{V}$ je subbáze okolí 0 sestávající z absolutně konvexních množin, pak τ je generována systémem pseudonorem $\{\mu_V;\ V \in \mathcal{V}\}$. Navíc, τ je generována také systémem všech spojitých pseudonorem na X.*

3. Metrizovatelnost a normovatelnost

Věta 16. *Nechť (X, τ) je HTVS. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) X má spočetnou bázi okolí 0.

(ii) X je metrizovatelný.

(iii) X je metrizovatelný translačně invariantní pseudometrikou.

Pokud X je HLCS, pak je metrizovatelný, právě když τ je generována spočetným systémem pseudonorem $\{p_n\}$ a v tomto případě

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \min\{p_n(x-y), 1\} \tag{1}$$

je translačně invariantní pseudometrika na X generující τ.

Konec 3. přednášky

Definice 17. Nechť X je topologický vektorový prostor a $A \subset X$. Množina A se nazývá *omezená*, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $t > 0$ takové, že $A \subset tU$.

Tvrzení 18. *Nechť X je TVS nad $\mathbb{K}$ a $A \subset X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Množina A je omezená.

(ii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ a každou posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{K}$, $\gamma_n \to 0$ platí $\gamma_n x_n \to 0$.

(iii) Pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset A$ platí $\frac{1}{n} x_n \to 0$.

Navíc, pokud X je LCS a topologie na X je generována systémem pseudonorem $\mathcal{P}$, pak předchozí podmínky jsou ekvivalentní tomu, že každá $p \in \mathcal{P}$ je omezená na A.

Definice 19. Nechť X je topologický vektorový prostor. Řekneme, že X je *normovatelný*, pokud je jeho topologie generovaná normou.

Věta 20 (A. N. Kolmogorov (1934))**.** *Nechť (X, τ) je HTVS. Pak X je normovatelný, právě když v něm existuje omezené konvexní okolí* 0.

Lemma 21. *Nechť (X, τ) je LCS, topologie τ je generována systémem pseudonorem $\mathcal{P}$ a p je pseudonorma na X. Pak p je spojitá, právě když existují $p_,1, \dots, p_n \in \mathcal{P}$ a $C > 0$ splňující $p \leqslant C \max\{p_1, \dots, p_n\}$.*

Konec 4. přednášky

4. Spojitá lineární zobrazení

Věta 22. *Nechť X a Y jsou HTVS a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Uvažujme násl. tvrzení:*

(i) *T je omezené na nějakém okolí* 0.

(ii) *T je spojité v* 0.

(iii) *T je spojité.*

(iv) *T je stejnoměrně spojité.*

(v) *$T(A)$ je omezená pro každou omezenou $A \subset X$.*

Pak (i)⇒(ii)⇔(iii)⇔(iv)⇒(v). Je–li Y normovatelný, pak (i)-(iv) jsou ekvivalentní. Je-li X metrizovatelný, pak (ii)-(v) jsou ekvivalentní.

Lemma 23. *Nechť X je metrizovatelný TVS. Jestliže $\{x_n\} \subset X$ konverguje k 0, pak existuje posloupnost $\{\gamma_n\} \subset \mathbb{N}$ taková, že $\gamma_n \to +\infty$ a $\gamma_n x_n \to 0$.*

Tvrzení 24. *Nechť X a Y jsou HLCS, a $T\colon X \to Y$ je lineární zobrazení. Nechť $\mathcal{P}$ je systém pseudonorem generující topologii prostoru X a $\mathcal{Q}$ je systém pseudonorem generující topologii prostoru Y. Pak T je spojité, právě když $q \circ T$ je spojité pro každé $q \in \mathcal{Q}$, ekvivalentně*

$$\forall q \in \mathcal{Q}\ \exists p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P} \exists C > 0 \forall x \in X : q(Tx) \leqslant C \cdot \max\{p_1(x), \dots, p_k(x)\}.$$

Věta 25. *Nechť X je HTVS a $f\colon X \to \mathbb{K}$ je nenulová lineární forma. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) *f je spojitá.*

(ii) $\operatorname{Ker} f$ *je uzavřené.*

(iii) $\overline{\operatorname{Ker} f} \neq X$.

Konec 5. přednášky

Jako obvykle budeme lineárním formám říkat též (lineární) *funkcionály*.

Definice 26. Nechť X je topologický vektorový prostor. Symbolem $X^\#$ budeme značit prostor všech lineárních forem (funkcionálů) na X a budeme jej nazývat *algebraickým duálem*. Symbolem X^* budeme značit podprostor $X^\#$ sestávající z lineárních funkcionálů, které jsou spojité na X, a budeme jej nazývat *topologickým duálem* (či jenom *duálem*).

Definice 27. Nechť X a Y jsou topologické vektorové prostory a $T\colon X \to Y$ je lineární. Říkáme, že T je izomorfismus X na Y (nebo jen *izomorfismus*), pokud T je homeomorfismus X na Y; říkáme, že T je izomorfismus X do Y (nebo jen *izomorfismus do*), pokud T je izomorfismus X na $\operatorname{Rng} T$.

5. Konečněrozměrné prostory

Definice 28. Nechť X je TVS a $A \subset X$. Množina A se nazývá *totálně omezená*, pokud pro každé $U \in \tau(0)$ existuje $F \subset A$ konečná taková, že $A \subset F + U$.

Tvrzení 29. *Nechť X je TVS. Kompaktní podmnožiny X jsou totálně omezené a totálně omezené podmnožiny X jsou omezené.*

Věta 30. *Nechť X je HTVS. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) $\dim X < \infty$.

(ii) *Existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že X je izomorfní s $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.*

(iii) *Existuje totálně omezené okolí nuly v X.*

(iv) *X je metrizovatelný a každé lineární zobrazení z X do nějakého topologického vektorového prostoru je spojité.*

(v) *X je metrizovatelný a každá lineární forma na X je spojitá.*

Důsledek 31. *Nechť X je HTVS. Pak každý konečněrozměrný podprostor X je uzavřený v X.*

Konec 6. přednášky

6. Oddělovací věty

Věta 32. *Nechť X je LCS a $A, B \subset X$ jsou disjunktní konvexní množiny. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Má-li A neprázdný vnitřek, pak existuje $f \in X^*\backslash\{0\}$ takový, že $\sup_A \operatorname{Re} f \leqslant \inf_B \operatorname{Re} f$.*

(b) *Je-li A uzavřená a B kompaktní, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $\sup_A \operatorname{Re} f < \inf_B \operatorname{Re} f$. Je-li navíc A absolutně konvexní, pak dokonce $\sup_A |f| < \inf_B \operatorname{Re} f$.*

Důsledek 33. *Nechť X je LCS. Pak platí následující tvrzení:*

(a) *Je-li X Hausdorffův, pak X^* odděluje body X.*

(b) *Je-li Y uzavřený podprostor X a $x \notin Y$, pak existuje $f \in X^*$ takový, že $f\restriction_Y = 0$ a $f(x) = 1$.*

(c) *Je-li Y podprostor X a $f \in Y^*$, pak existuje $F \in X^*$ takový, že $F\restriction_Y = f$.*

7. Fréchetovy prostory

Definice 34. Nechť X je metrizovatelný HTVS.

- Pokud je topologie na X indukovaná translačně invariantní úplnou metrikou, říkáme že X je *F-prostor*.
- Pokud X je F-prostor a navíc je lokálně konvexní, říkáme že X je *Fréchetův*.

Lemma 35. *Nechť X je HLCS, jehož topologie je generovaná systémem pseudonorem $\{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ splňující, že $p_1 \leqslant p_2 \leqslant \ldots$. Nechť ρ je translačně invariantní metrika na X definovaná předpisem (1). Pak posloupnost $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ je cauchyovská v (X, ρ), právě když $(x_k)_k$ je cauchyovská v pseudonormě p_n pro každé $n \in \mathbb{N}$.*

Konec 7. přednášky

Tvrzení 36. *Nechť X je LCS a $A \subset X$ je totálně omezená množina. Pak $\overline{\operatorname{aconv}} A$ je totálně omezená. Speciálně, pokud X je Fréchetův prostor a $A \subset X$ je kompaktní, pak $\overline{\operatorname{aconv}} A$ je kompaktní.*

Věta 37 (Princip stejnoměrné omezenosti)**.** *Nechť X je Fréchetův prostor, Y je LCS a $\mathcal{A}$ soubor spojitých lineárních operátorů z X do Y. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(i) *Pro každé $x \in X$ je $\{Tx : T \in \mathcal{A}\}$ omezená množina.*

(ii) *Operátory z $\mathcal{A}$ jsou stejně stejnoměrně spojité, tj. pro každé $V \in \tau_Y(0)$ existuje $U \in \tau_X(0)$ splňující $T(U) \subset V$ pro každé $T \in \mathcal{A}$.*

Důsledek 38. *Nechť X je Fréchetův prostor, Y je LCS a $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ posloupnost spojitých lineárních operátorů z X do Y taková, že pro každé $x \in X$ existuje $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$. Pak $T : X \to Y$ je spojitý lineární operátor.*

Věta 39 (Věta o otevřeném zobrazení)**.** *Nechť X a Y jsou F-prostory a $T : X \to Y$ je spojité lineární a na. Pak T je otevřené. Speciálně, pokud T je navíc prosté, pak T je isomorfismus.*

Konec 8. přednášky

Věta 40 (o uzavřeném grafu)**.** *Nechť X a Y jsou F-prostory a $T : X \to Y$ je lineární zobrazení. Pak T je spojité, právě když T má uzavřený graf.*

8. Slabé topologie a poláry

Slabé topologie

Definice 41. Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^{\#}$. Symbolem $\sigma(X, M)$ označujeme lokálně konvexní topologii na X generovanou systémem pseudonorem $\{|f|;\ f \in M\}$.

Definice 42. Nechť X je topologický vektorový prostor.

- Topologie $w = \sigma(X, X^*)$ se nazývá *slabou topologií* (též w-topologií) na X.
- Topologie $w^* = \sigma(X^*, \varepsilon(X))$ se nazývá *slabou s hvězdičkou topologií* (též w^*-topologií) na X^*.

Lemma 43. *Nechť X je vektorový prostor a $f, f_1, \dots, f_n$ jsou lineární formy na X. Pak $f \in \operatorname{span}\{f_1, \dots, f_n\}$, právě když $\bigcap_{j=1}^n \operatorname{Ker} f_j \subset \operatorname{Ker} f$.*

Tvrzení 44. *Nechť X je vektorový prostor a $M, N \subset X^{\#}$. Pak $\sigma(X, M) = \sigma(X, N)$, právě když $\operatorname{span} M = \operatorname{span} N$. Speciálně, $\sigma(X, M) = \sigma(X, \operatorname{span} M)$.*

Věta 45. *Nechť X je vektorový prostor a $M \subset X^{\#}$. Pak $(X, \sigma(X, M))^* = \operatorname{span} M$.*

Důsledek 46. *Nechť (X, τ) je LCS. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $w \subset \tau$ *a* $(X, w)^* = X^*$.

(b) $(X^*, w^*)^* = \varepsilon(X)$.

(c) Pokud je X normovaný lineární prostor a $f \in X^{**}$, pak $f \in \varepsilon(X)$ právě když f je w^*-spojitý.

Tvrzení 47. *Nechť X je LCS a Y je podprostor X. Pak na Y splývá topologie $\sigma(Y, Y^*)$ s restrikcí topologie $\sigma(X, X^*)$ na Y.*

Konec 9. přednášky

Věta 48 (Mazurova věta)**.** *Nechť X je LCS a $A \subset X$ je konvexní. Pak platí následující tvrzení:*

(a) $\overline{A}^w = \overline{A}$.

(b) A je slabě uzavřená, právě když je uzavřená.

(c) Je-li X metrizovatelný a $x_n \to x$ slabě, pak existují $y_n \in \operatorname{conv}\{x_j;\ j \geqslant n\}$ takové, že $y_n \to x$.

Věta 49 (Mackey)**.** *Nechť X je lokálně konvexní prostor a $A \subset X$. Pak A je omezená právě tehdy, když je slabě omezená.*

Věta 50. *Nechť X, Y jsou HLCS a $T\colon X \to Y$ je spojité lineární zobrazení. Pak platí následující.*

(a) T je w–w spojité.

(b) Definujme $T^*: Y^* \to X^*$ předpisem $T^* f = f \circ T$, $f \in Y^*$. Pak T^* je w^*-w^* spojité.

Poláry

Definice 51. Je-li X lokálně konvexní prostor a $A \subset X$, pak definujeme *(absolutní) poláru* množiny A jako

$$A^\circ = \{f \in X^*;\ |f(x)| \leqslant 1 \text{ pro každé } x \in A\}.$$

Pro množinu $B \subset X^*$ pak definujeme *zpětnou (absolutní) poláru* jako

$$B_\circ = \{x \in X;\ |f(x)| \leqslant 1 \text{ pro každé } f \in B\}.$$

Věta 52 (O bipoláře; Jean Dieudonné (1950))**.** *Nechť X je LCS.*

(a) Je-li $A \subset X$, pak $(A^\circ)_\circ = \overline{\operatorname{aconv}}^{\,w} A$ (= $\overline{\operatorname{aconv}} A$, pokud X je lokálně konvexní).

(b) Je-li $B \subset X^*$, pak $(B_\circ)^\circ = \overline{\operatorname{aconv}}^{\,w^*} B$.

Důsledek 53. *Nechť X je normovaný lineární prostor.*

(a) Pro $B \subset X^*$ platí $(B_\perp)^\perp = \overline{\operatorname{span}}^{\,w^*} B$.

(b) Pokud Y je normovaný lineární prostor a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, pak $\overline{\operatorname{Rng} T^*}^{\,w^*} = (\operatorname{Ker} T)^\perp$.

Konec 10. přednášky

Věta 54 (Herman Heine Goldstine (1938))**.** *Je-li X normovaný lineární prostor, pak $\overline{\varepsilon(B_X)}^{w^*} = B_{X^{**}}$.*

Věta 55 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)**.** *Nechť X je HLCS a U okolí 0 v X.*

(a) U° je w^*-kompaktní množina.

(b) Je–li X separabilní a $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ je hustá v X, pak (U°, w^*) je topologický prostor metrizovatelný metrikou

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}\min\{|(f-g)(x_n)|, 1\}.$$

Důsledek 56. *Nechť X je normovaný lineární prostor. Pak (B_{X^*}, w^*) je kompaktní. Je–li navíc X separabilní, pak (B_{X^*}, w^*) je navíc metrizovatelná.*

Tvrzení 57. *Nechť X je normovaný lineární prostor, X^* je separabilní a $\{f_n\}$ je hustá v S_{X^*}. Pak (B_X, w) je metrizovatelná metrikou*

$$\rho(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}|f_n(x-y)|.$$

Věta 58. *Je-li X Banachův prostor, pak X je reflexivní, právě když (B_X, w) je kompaktní. Je–li navíc X separabilní, pak (B_X, w) je metrizovatelná.*

Důsledek 59. *Nechť X je Banachův prostor. Pak X je reflexivní, právě když slabá a w^* topologie na X^* splývají.*

Konec 11. přednášky

II. Distribuce

1. Prostor testovacích funkcí

Lemma 60. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená.*

(a) Nechť μ je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na Ω. Jestliže $\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $\mu = 0$.

(b) Nechť $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda = 0$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f = 0$ s. v. na Ω.

(c) Nechť μ je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na Ω a $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$. Jestliže $\int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou nezápornou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega, \mathbb{R})$, pak $f \in L_1(\Omega, \lambda)$ a $\mu(A) = \int_A f \,\mathrm{d}\lambda$ pro každou borelovskou $A \subset \Omega$.

Lemma 61. *Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní a $G \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená, $G \supset K$. Pak existují $U \subset G$ otevřená, $U \supset K$ a $\varphi \in \mathcal{D}(G)$ taková, že $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$ a $\varphi = 1$ na U.*

Definice 62. Nechť $K \subset \mathbb{R}^d$ je kompaktní, pak symbolem τ_K označujeme metrizovatelnou lokálně konvexní topologii na $\mathcal{D}(K)$ generovanou spočetným systémem norem $\|\cdot\|_N$, $N \in \mathbb{N}_0$, kde

$$\|\varphi\|_N = \max_{|\alpha| \leqslant N}\|D^\alpha \varphi\|_\infty, \qquad \varphi \in \mathcal{D}(K),\ N \in \mathbb{N}_0.$$

Symbolem τ_{C^∞} označujeme topologii na $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ generovanou spočetným systémem pseudonorem $|\cdot|_N$, $N \in \mathbb{N}_0$, kde

$$|f|_N = \max_{|\alpha| \leqslant N}\|D^\alpha f|_{B(0,N)}\|_\infty, \qquad f \in C^\infty(\mathbb{R}^d),\ N \in \mathbb{N}_0.$$

Konec 12. přednášky

Tvrzení 63. *$(C^\infty(\mathbb{R}^d), \tau_{C^\infty})$ a $(\mathcal{D}(K), \tau_K)$ jsou Fréchetovy prostory pro každou $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní.*

Věta 64. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená a neprázdná. Položme*

$$\mathcal{U} = \big\{U \subset \mathcal{D}(\Omega);\ U \text{ absolutně konvexní, } U \cap \mathcal{D}(K) \in \tau_K(0) \text{ pro každý kompakt } K \subset \Omega\big\}.$$

Pak $\mathcal{U}$ je bází okolí 0 pro Hausdorffovu lokálně konvexní topologii τ na $\mathcal{D}(\Omega)$, která má následující vlastnosti:

(a) Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je $\mathcal{D}(K)$ uzavřený podprostor $(\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ a $\tau\restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.

(b) Je-li $A \subset (\mathcal{D}(\Omega), \tau)$ omezená, pak existuje $K \subset \Omega$ kompaktní taková, že $A \subset \mathcal{D}(K)$.

(c) Nechť $\{\varphi_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{D}(\Omega)$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak $\varphi_n \to \varphi$ v τ, právě když existuje kompakt $K \subset \Omega$ takový, že $\operatorname{supp}\varphi_n \subset K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, a pro každý multiindex α délky d platí, že $D^\alpha\varphi_n \to D^\alpha\varphi$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.

2. Prostor distribucí

Definice 65. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená neprázdná. Pak $\mathcal{D}(\Omega)^* = \big(\mathcal{D}(\Omega), \tau\big)^*$ nazýváme *prostor distribucí*. Řekneme, že Λ je *distribuce*, pokud $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

Tvrzení 66 (charakterizace distribucí)**.** *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená neprázdná, Y je HLCS a $\Lambda\colon (\mathcal{D}(\Omega), \tau) \to Y$ je lineární. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) Λ je spojité.

(ii) Λ je sekvenciálně spojitá, tj. $\Lambda(\varphi_n) \to \Lambda(\varphi)$ kdykoliv $\varphi_n \xrightarrow{\tau} \varphi$.

(iii) Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ je restrikce $\Lambda\restriction_{\mathcal{D}(K)}$ spojitá.

Navíc, pokud je $Y = \mathbb{K}$, pak podmínky výše jsou ekvivalentní podmínce

(iv) Pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existují $N \in \mathbb{N}_0$ a $C > 0$ splňující $|\Lambda(\varphi)| \leqslant C\|\varphi\|_N$ pro každé $\varphi \in \mathcal{D}(K)$.

Poznámka: důkaz byl předveden pouze pro případ $Y = \mathbb{K}$. **Konec 13. přednášky**

Definice 67. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená neprázdná a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pokud existuje $N \in \mathbb{N}_0$ takové, že pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ existuje $C \geqslant 0$ takové, že $|\Lambda(\varphi)| \leqslant C\|\varphi\|_N$ pro libovolnou $\varphi \in \mathcal{D}(K)$, potom nejmenší N s touto vlastností nazveme *řádem distribuce* Λ. Pokud takové N neexistuje, pak řád Λ definujeme jako nekonečno.

Příklady 68. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená neprázdná.

(i) Pro $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$ definujeme $\Lambda_f(\varphi) = \int_\Omega f\varphi \,\mathrm{d}\lambda$ pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak Λ_f je distribuce řádu 0 a kdykoliv $\Lambda_f = \Lambda_g$ pro nějakou $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$, pak $f = g$ s.v.

(ii) Nechť μ je borelovská komplexní (resp. znaménková) míra na Ω. Definujeme $\Lambda_\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu$ pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak Λ_μ je distribuce řádu 0. Kdykoliv $\Lambda_\mu = \Lambda_\nu$ pro nějakou borelovskou komplexní (resp. znaménkovou) míru ν, pak $\mu = \nu$. Kdykoliv $\Lambda_\mu = \Lambda_f$ pro nějakou $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$, pak $\mu = f \,\mathrm{d}\lambda$.

(iii) Nechť μ je nezáporná borelovská regulární míra na Ω, která je konečná na kompaktech. Definujeme $\Lambda_\mu(\varphi) = \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu$ pro $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pak Λ_μ je distribuce řádu 0. Kdykoliv $\Lambda_\mu = \Lambda_\nu$ pro nějakou míru ν, pak $\mu = \nu$. Kdykoliv $\Lambda_\mu = \Lambda_f$ pro nějakou $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega, \lambda)$, pak $\mu = f \,\mathrm{d}\lambda$.

(iv) Nechť $k \in \mathbb{N}$. Definujeme $\Lambda(\varphi) = \varphi^{(k)}(0)$ pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pak Λ je distribuce řádu k, která není řádu $k - 1$.

(v) Definujeme $\Lambda(\varphi) = \sum_{n=1}^\infty \varphi^{(n)}(n)$ pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Pak Λ je distribuce řádu nekonečno.

Definice 69. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená neprázdná a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$. Pro multiindex α délky d definujeme *derivaci D^α distribuce* Λ jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(D^\alpha\Lambda)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha\varphi).$$

Pro funkci $f \in C^\infty(\Omega)$ definujeme *součin funkce f a distribuce* Λ jako funkcionál na $\mathcal{D}(\Omega)$ daný předpisem

$$(f\Lambda)(\varphi) = \Lambda(f\varphi).$$

Lemma 70. *Nechť $k \in \mathbb{N}$, $f \in C^k(\mathbb{R}^d)$ má kompaktní nosič a nechť $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $|\alpha| \leqslant k$. Pak*

$$\int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha f\varphi \,\mathrm{d}\lambda = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d} fD^\alpha\varphi \,\mathrm{d}\lambda$$

pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Tvrzení 71. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená neprázdná, $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a $f \in C^\infty(\Omega)$. Pak platí:*

(a) $D^\alpha\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

(b) $f\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$.

(c) Je-li $g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$, pak $f\Lambda_g = \Lambda_{fg}$.

(d) Je-li $g \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, pak $D^\alpha\Lambda_g = \Lambda_{D^\alpha g}$.

Věta 72. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená neprázdná souvislá a $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$ taková, že $D^\alpha\Lambda = 0$ pro každý multiindex α splňující $|\alpha| = 1$. Pak existuje $c \in \mathbb{K}$, že $\Lambda = \Lambda_c$.*

Poznámka: důkaz byl předveden pouze pro případ $d = 1$ a $\Omega = (a, b)$.**Konec 14. přednášky**

Definice 73. Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená neprázdná. *Prostorem distribucí* rozumíme lokálně konvexní prostor $(\mathcal{D}(\Omega)^*, w^*)$.

Tvrzení 74. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená neprázdná. Pak platí:*

(a) Jestliže posloupnost $\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{D}(\Omega)^*$ konverguje k $\Lambda \in \mathcal{D}(\Omega)^*$, pak

- *$D^\alpha \Lambda_n \to D^\alpha \Lambda$ pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$,*
- *$f\Lambda_n \to f\Lambda$ pro každou funkci $f \in C^\infty(\Omega)$.*

(b) Jsou-li $f_n, f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ a jestliže pro každou kompaktní $K \subset \Omega$ platí $\int_K |f_n - f| \,\mathrm{d}\lambda \to 0$, pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.

(c) Je-li $1 \leqslant p \leqslant \infty$ a $f_n \to f$ v $L_p(\Omega)$, pak $\Lambda_{f_n} \to \Lambda_f$.

(d) Je-li $\varphi_n \to \varphi$ v $\mathcal{D}(\Omega)$, pak $\Lambda_{\varphi_n} \to \Lambda_\varphi$.

Tvrzení 75. *Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ je otevřená neprázdná a (Λ_n) je posloupnost distribucí na Ω taková, že pro každou $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je $\big(\Lambda_n(\varphi)\big)$ konvergentní posloupnost. Pak funkce $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ daná předpisem $\Lambda(\varphi) := \lim_{n\to\infty} \Lambda_n(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ je distribuce na Ω.*

Definice 76. Nechť $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$. Pak definujeme otočení funkce f jako funkci $\check{f}\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ danou předpisem $\check{f}(x) = f(-x)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$.

Definice 77. Nechť Λ je distribuce na $\mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ a $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Pak definujeme posunutí distribuce Λ jako distribuci $\tau_y\Lambda$ danou předpisem $\tau_y\Lambda(\psi) = \Lambda(\tau_{-y}\psi)$ pro $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Dále definujeme *konvoluci* funkce φ a distribuce Λ předpisem $\Lambda * \varphi(x) := \Lambda(\tau_x\check{\varphi})$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Věta 78 (o konvoluci distribuce s funkcí)**.** *Nechť Λ je distribuce na $\mathbb{R}^d$, $y \in \mathbb{R}^d$ a $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.*

(a) Je–li $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, pak $\Lambda_f * \varphi = f * \varphi$.

(b) $\Lambda * \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ platí $D^\alpha(\Lambda * \varphi) = D^\alpha\Lambda * \varphi = \Lambda * D^\alpha\varphi$.

(c) $\tau_y(\Lambda * \varphi) = \tau_y\Lambda * \varphi = \Lambda * \tau_y\varphi$.

(d) Pro $x_0 \in \mathbb{R}^d$ platí $\Lambda_{\delta_{x_0}} * \varphi = \tau_{x_0}\varphi$. Speciálně, $\Lambda_{\delta_0} * \varphi$.

Konec 15. přednášky

Definice 79. Nechť U je distribuce na $\mathbb{R}^d$. Pak definujeme otočení U jako distribuci $\check{U}$ na $\mathbb{R}^d$ danou předpisem $\check{U}(\varphi) = U(\check{\varphi})$ pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.

Příklady 80. Konvoluci dvou distribucí se snažíme definovat předpisem $U * V(\varphi) = U(\check{V} * \varphi)$ pro $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Protože ale funkce $\check{V} * \varphi$ nemusí mít kompaktní nosič, je třeba tento předpis správně interpretovat. Způsob jak tento předpis správně chápat se může v různých situacích lišit. Základní příklady jsou zmíněny níže.

(i) Pro $f \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ definujme
$$(D^\alpha\Lambda_f) * \Lambda_\varphi(\psi) := D^\alpha\Lambda_f(\widecheck{\Lambda_\varphi} * \psi).$$
Pak $D^\alpha\Lambda_f * \Lambda_\varphi$ je distribuce a platí $(D^\alpha\Lambda_f) * \Lambda_\varphi = D^\alpha\Lambda_{f*\varphi} = D^\alpha(\Lambda_f * \Lambda_\varphi)$.

(ii) Pokud $x_0 \in \mathbb{R}^d$ a U je distribuce na $\mathbb{R}^d$, pro $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ a $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ definujme
$$U * D^\alpha\Lambda_{\delta_{x_0}}(\psi) := U(\widecheck{D^\alpha\Lambda_{\delta_{x_0}}} * \psi), \qquad D^\alpha\Lambda_{\delta_{x_0}} * U(\psi) := D^\alpha\delta_{x_0}(\check{U} * \psi),$$
kde $D^\alpha\Lambda_{\delta_{x_0}}$ chápeme jako prvek $(C^\infty(\mathbb{R}^d))^*$ definovaný předpisem $D^\alpha\Lambda_{\delta_{x_0}}(f) = (-1)^{|\alpha|}D^\alpha f(x_0)$ pro $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pak $U * D^\alpha\Lambda_{\delta_{x_0}} = D^\alpha\Lambda_{\delta_{x_0}} * U = \tau_{x_0}D^\alpha U$ a jedná se tedy o dobře definované distribuce. Navíc, platí $D^\alpha(U * \Lambda_{\delta_{x_0}}) = D^\alpha U * \Lambda_{\delta_{x_0}} = U * D^\alpha\Lambda_{\delta_{x_0}}$.

(iii) Pokud $f, g, f * g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, pro každý multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ položme
$$D^\alpha\Lambda_f * \Lambda_g(\psi) := D^\alpha\Lambda_f(\widecheck{\Lambda_g} * \psi), \qquad \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d),$$
kde v předpisu výše chápeme Λ_f jako lineární funkci definovanou předpisem $D^\alpha\Lambda_f(h) = (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d} fD^\alpha h$ kdykoliv $h \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ a $\int_{\mathbb{R}^d} fD^\alpha h$ je konvergentní. Pak $D^\alpha\Lambda_f * \Lambda_g = D^\alpha\Lambda_{f*g}$ a jedná se tedy o dobře definované distribuce splňující $D^\alpha(\Lambda_f * \Lambda_g) = (D^\alpha\Lambda_f) * \Lambda_g$.

(iv) Pokud $f, g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ a pokud $(\operatorname{supp} f \cup \operatorname{supp} g) \subset (\mathbb{R}_+)^d$, pak $f * g \in L_1^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Definice 81. *Aproximativní jednotka v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$* je posloupnost funkcí $(h_j)_{j=1}^\infty$ v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, splňující $h_j(x) = j^d h(jx)$ pro $x \in \mathbb{R}^d$ a $j \in \mathbb{N}$, kde $h \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je nezáporná funkce a $\int_{\mathbb{R}^d} h = 1$.

Tvrzení 82. *Nechť (h_j) je aproximativní jednotka v $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a U je distribuce na $\mathbb{R}^d$. Pak $\varphi * h_j \to \varphi$ v prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ a $\Lambda_{U*h_j} \to U$ v prostoru $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^*$.*

Poznámka: dokázáno bylo jen že platí $\varphi * h_j \to \varphi$.**Konec 16. přednášky**

3. Temperované distribuce

Pro $N \in \mathbb{N}_0$ a $f \in \mathcal{S}_d$ položme

$$\nu_N(f) = \max_{|\alpha| \leqslant N} \left\| x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f(x) \right\|_\infty .$$

Metrizovatelnou lokálně konvexní topologii na $\mathcal{S}_d$ generovanou systémem $\{\nu_N\}_{N=0}^\infty$ označíme σ.

Věta 83. *$(\mathcal{S}_d, \sigma)$ je Fréchetův prostor a topologie σ má následující vlastnosti:*

(a) Nechť $\{f_n\}$ je posloupnost v $\mathcal{S}_d$ a $f \in \mathcal{S}_d$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- *(i) $f_n \to f$ v topologii σ.*
- *(ii) Pro každé $N \in \mathbb{N}_0$ a každý multiindex α délky d platí, že $(1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f_n \to (1 + \|x\|^2)^N D^\alpha f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*
- *(iii) Pro každý polynom P a každý multiindex α délky d platí, že $PD^\alpha f_n \to PD^\alpha f$ stejnoměrně na $\mathbb{R}^d$.*

(b) Jestliže $f_n \to f$ v prostoru $(\mathcal{S}_d, \sigma)$, pak $f_n \to f$ v $L_p(\mathbb{R}_d)$ pro každé $1 \leqslant p < \infty$.

(c) Je-li α multiindex délky d, P polynom na $\mathbb{R}^d$ a $g \in \mathcal{S}_d$, pak zobrazení $f \mapsto D^\alpha f$, $f \mapsto Pf$ a $f \mapsto gf$ jsou spojitá jakožto zobrazení z $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ do $(\mathcal{S}_d, \sigma)$.

(d) Pro $K \subset \mathbb{R}^d$ kompaktní platí $\sigma\restriction_{\mathcal{D}(K)} = \tau_K$.

Tvrzení 84. *Podprostor $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ je hustý v $(\mathcal{S}_d, \sigma)$ a pro topologii τ platí, že $\sigma\restriction_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)} \subset \tau$. Jinými slovy, vnoření Id: $(\mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tau) \to (\mathcal{S}_d, \sigma)$ je spojité a na hustou podmnožinu.*

Definice 85. Distribuce na $\mathbb{R}^d$, které jsou restrikcemi funkcionálů z $(\mathcal{S}_d, \sigma)^*$, se nazývají *temperované distribuce*.

Tvrzení 86. *Distribuce Λ na $\mathbb{R}^d$ je temperovaná, právě když existuje $N \in \mathbb{N}_0$ a $C > 0$ splňující $|\Lambda(\varphi)| \leqslant C\nu_N(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$.*

Příklady 87. (a) Každá distribuce s kompaktním nosičem (tj. splňující že existuje kompaktní $K \subset \mathbb{R}^d$ taková, že $\Lambda(\varphi) = 0$ kdykoliv $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \backslash K)$) je temperovaná.

(b) Kdykoliv μ je borelovská míra splňující $\int (1 + \|x\|^2)^{-N} \, \mathrm{d}\mu < \infty$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}_0$, pak Λ_μ je temperovaná distribuce a $\Lambda_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f \, \mathrm{d}\mu$ pro $f \in \mathcal{S}_d$.

(c) Kdykoliv g je měřitelná funkce na $\mathbb{R}^d$ taková, že $x \mapsto (1 + \|x\|^2)^N \in L_p(\mathbb{R}^d)$ pro nějaké $N \in \mathbb{N}_0$ a $1 \leqslant p \leqslant \infty$ (Toto speciálně platí pro funkce z $L_p(\mathbb{R}^d)$ nebo pro funkce majorizované nějakým polynomem). Pak Λ_g je temperovaná distribuce, kde $\Lambda_g(f) = \int_{\mathbb{R}^d} fg$ pro $f \in \mathcal{S}_d$.

Tvrzení 88. *Nechť Λ je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, $g \in \mathcal{S}_d$ a P je polynom na $\mathbb{R}^d$. Pak $D^\alpha \Lambda$, $g\Lambda$ a $P\Lambda$ jsou též temperované distribuce a vzorce*

- *$D^\alpha \Lambda(f) = (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha f)$,*
- *$(g\Lambda)(f) = \Lambda(gf)$ a*
- *$(P\Lambda)(f) = \Lambda(Pf)$*

platí pro každou $f \in \mathcal{S}_d$. Dále zobrazení $\Lambda \mapsto D^\alpha \Lambda$, $\Lambda \mapsto g\Lambda$ a $\Lambda \mapsto P\Lambda$ jsou spojitá lineární zobrazení z prostoru $(\mathcal{S}_d^*, w^*)$ do sebe.

Konec 17. přednášky

Věta 89. *Fourierova transformace je isomorfismus $\mathcal{S}_d$ na $\mathcal{S}_d$. Navíc, pro každé $f \in \mathcal{S}_d$ platí, že*

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x) \text{ pro každé } x \in \mathbb{R}^d \quad \text{a} \quad \hat{\hat{\hat{\hat{f}}}} = f.$$

Důsledek 90. *Pro $f, g \in \mathcal{S}_d$ platí $(2\pi)^{d/2} \widehat{fg} = \widehat{f} * \widehat{g}$. Speciálně, prostor $\mathcal{S}_d$ je uzavřený na konvoluci.*

Definice 91. *Fourierova transformace temperované distribuce* Λ na $\mathbb{R}^d$ je definována vzorcem $\widehat{\Lambda}(f) = \Lambda(\widehat{f})$ pro $f \in \mathcal{S}_d$.

Věta 92.

(a) Je-li $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$, pak $\Lambda_{\widehat{g}}$ je temperovaná distribuce a $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{\widehat{g}}$. Je-li $g \in L_2(\mathbb{R}^d)$, pak $\widehat{\Lambda_g} = \Lambda_{F(g)}$, kde F je rozšířením Fourierovy transformace z Plancherelovy věty.

(b) Je-li Λ je temperovaná distribuce na $\mathbb{R}^d$ a $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, pak

- $\widehat{D^\alpha \Lambda} = s_\alpha \widehat{\Lambda}$, *kde* $s_\alpha(x) = (ix)^\alpha$, *a*
- $D^\alpha \widehat{\Lambda} = \widehat{m_\alpha \Lambda}$, *kde* $m_\alpha(x) = (-ix)^\alpha$.

(c) Fourierova transformace $\mathcal{F}$ temperovaných distribucí je izomorfismem prostoru $(\mathcal{S}_d^*, w^*)$ na sebe. Platí pro ni, že $\mathcal{F}^4 = Id$.

Definice 93. Pro $\Lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^*$ a funkci $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ definujme zobrazení $\Lambda * \Lambda_\varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{K}$ předpisem

$$\Lambda * \Lambda_f(g) := \Lambda(\check{f} * g), \qquad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Tvrzení 94. *Nechť $\Lambda \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^*$ a $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pak platí následující.*

(a) $\Lambda * \Lambda_f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^*$ a pro každé $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ platí $D^\alpha(\Lambda * \Lambda_f) = (D^\alpha \Lambda) * \Lambda_f$.

(b) $\Lambda_{\delta_0} * \Lambda_f = \Lambda_f$.

Konec 18. přednášky

III. Základy vektorové integrace

1. Měřitelná zobrazení

Definice 95. Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a X je Banachův prostor. Zobrazení $f: \Omega \to X$ se nazývá

- *borelovsky $\mathcal{A}$-měřitelné*, pokud $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ pro každou $U \subset X$ otevřenou,
- *jednoduché měřitelné*, pokud $f(\Omega)$ je konečná množina a f je borelovsky $\mathcal{A}$-měřitelné (tj. $f = \sum_{i=1}^n x_i \chi_{A_i}$ kde $(x_i)_{i=1}^n \in X^n$ a $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ jsou po dvou disjunktní),
- *silně $\mathcal{A}$-měřitelné*, pokud f je bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných funkcí (tj. existují jednoduché měřitelné funkce (s_n) takové, že $\|s_n(x) - f(x)\| \to 0$ pro každé $x \in \Omega$),
- *slabě $\mathcal{A}$-měřitelné*, pokud pro každé $x^* \in X^*$ je $x^* \circ f : \Omega \to \mathbb{K}$ borelovsky $\mathcal{A}$-měřitelné.

Tvrzení 96. *Nechť $(\Omega, \mathcal{A})$ je měřitelný prostor a X je Banachův prostor.*

(a) Bodová limita posloupnosti borelovsky $\mathcal{A}$-měřitelných zobrazení z Ω do X je borelovsky $\mathcal{A}$-měřitelné zobrazení.

(b) Pro funkci $f : \Omega \to X$ platí

$$f \text{ je silně } \mathcal{A}\text{-měřitelná} \Rightarrow f \text{ je borelovsky } \mathcal{A}\text{-měřitelná} \Rightarrow f \text{ je slabě } \mathcal{A}\text{-měřitelná}$$

(c) Pokud je X separabilní, pak $f : \Omega \to X$ je silně $\mathcal{A}$-měřitelná, právě když je borelovsky $\mathcal{A}$-měřitelná.

(d) Bodová limita posloupnosti silně (resp. slabě) $\mathcal{A}$-měřitelných zobrazení z Ω do X je silně (resp. slabě) $\mathcal{A}$-měřitelné zobrazení.

(e) Jednoduché měřitelná, silně $\mathcal{A}$-měřitelná zobrazení a slabě $\mathcal{A}$-měřitelná zobrazení tvoří vektorový prostor.

Definice 97. Nechť $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ je prostor s úplnou mírou a X je Banachův prostor. Zobrazení $f: \Omega \to X$ se nazývá *silně μ-měřitelné*, pokud f je μ-s.v. bodovou limitou posloupnosti jednoduchých měřitelných funkcí (tj. existují jednoduché měřitelné funkce (s_n) takové, že $\|s_n(x) - f(x)\| \to 0$ pro μ-s.v. $x \in \Omega$). Říkáme, že $f: \Omega \to X$ je *slabě μ-měřitelné* (resp. *borelovsky μ-měřitelné*), pokud je slabě $\mathcal{A}$-měřitelné (resp. borelovsky $\mathcal{A}$-měřitelné).

Lemma 98. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f: \Omega \to X$. Pak f je silně μ-měřitelné, právě když f je borelovsky μ-měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \backslash E)$ je separabilní.*

Důsledek 99. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f_n: \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost silně μ-měřitelných zobrazení, která konverguje bodově s. v. k $f: \Omega \to X$. Pak f je silně měřitelné.*

Konec 19. přednášky

Věta 100 (Pettisova věta)**.** *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f: \Omega \to X$. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

(i) f je silně μ-měřitelné.

(ii) f je borelovsky μ-měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \backslash E)$ je separabilní.

(iii) f je slabě μ-měřitelné a existuje $E \subset \Omega$ taková, že $\mu(E) = 0$ a $f(\Omega \backslash E)$ je separabilní.

2. Dunfordův a Pettisův integrál

Definice 101. Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor. Funkce $f : \Omega \to X$ je *slabě integrovatelná*, pokud pro každé $x^* \in X^*$ je $x^* \circ f \in L_1(\mu)$.

Je–li $f : \Omega \to X$ slabě integrovatelná a $E \subset \Omega$ měřitelná, pak *Dunfordův integrál f přes množinu E* je prvek $(D)\int_E f \,\mathrm{d}\mu \in X^{**}$ splňující

$$\Big((D)\int_E f \,\mathrm{d}\mu\Big)(x^*) = \int_E x^* \circ f \,\mathrm{d}\mu, \quad x^* \in X^*.$$

Tvrzení 102. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor, $f : \Omega \to X$ je slabě integrovatelná a $E \subset \Omega$ je měřitelná. Pak Dunfordův integrál f přes množinu E existuje a je jednoznačně určen.*

Definice 103. Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f : \Omega \to X$ je slabě integrovatelná. Je–li $(D)\int_E f \,\mathrm{d}\mu \in X$ (nebo přesněji $(D)\int_E f \,\mathrm{d}\mu \in \varepsilon(X) \subset X^{**}$) pro každou $E \subset \Omega$ měřitelnou, pak řekneme že f je *Pettisovsky integrovatelná* a

$$(P)\int_E f \,\mathrm{d}\mu = (D)\int_E f \,\mathrm{d}\mu$$

je *Petisův integrál f přes množinu E.*

Konec 20. přednášky

3. Bochnerův integrál

Definice 104. Nechť (Ω, μ) je prostor s mírou a X je Banachův prostor. Jednoduchá, měřitelná funkce $f \colon \Omega \to X$ je *Bochnerovsky integrovatelná*, jestliže pro každé $x \in f(\Omega)\backslash\{0\}$ je $\mu(f^{-1}(x)) < +\infty$.

Je–li $f \colon \Omega \to X$ jednoduchá, měřitelná a Bochnerovsky integrovatelná, pak pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ definujeme *Bochnerův integrál f* přes E jako

$$(B)\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{x \in f(\Omega)\backslash\{0\}} \mu(f^{-1}(x) \cap E)x.$$

Lemma 105. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou a X je Banachův prostor.*

(i) Bochnerovsky integrovatelné jednoduché funkce tvoří vektorový prostor a zobrazení, které jednoduché integrovatelné funkci f přiřadí její integrál $(B)\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$, je lineární.

(ii) Je–li $f \colon \Omega \to X$ jednoduchá, měřitelná, pak f je Bochnerovsky integrovatelná, právě když funkce $t \mapsto \|f(t)\|$ je integrovatelná. V tom případě je $\big\|(B)\int_E f \,\mathrm{d}\mu\big\| \leqslant \int_E \|f\| \,\mathrm{d}\mu$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.

Definice 106. Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f : \Omega \to X$ je silně μ-měřitelné. Řekneme, že je f je *bochnerovsky integrovatelné*, pokud existuje posloupnost $f_n \colon \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ jednoduchých Bochnerovsky integrovatelných zobrazení taková, že $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \|f_n - f\| \,\mathrm{d}\mu = 0$. Pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ pak definujeme *Bochnerův integrál f* přes E jako

$$(B)\int_E f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} (B)\int_E f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Věta 107. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor.*

(a) Limita definující Bochnerův integrál existuje a nezávisí na volbě posloupnosti (f_n).

(b) Bochnerovsky integrovatelné funkce tvoří vektorový prostor a zobrazení, které bochnerovsky integrovatelné funkci f přiřadí její integrál $(B)\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$, je lineární.

(c) $\big\|(B)\int_E f \,\mathrm{d}\mu\big\| \leqslant \int_E \|f\| \,\mathrm{d}\mu$ pro každou $E \subset \Omega$ měřitelnou a $f : \Omega \to X$ bochnerovsky integrovatelnou.

Věta 108. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f : \Omega \to X$ je silně μ-měřitelné. Pak f je bochnerovsky integrovatelné, právě když $\|f\|$ je lebesgueovsky integrovatelná.*

Věta 109 (o majorizované konvergenci)**.** *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f_n : \Omega \to X$, $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost silně μ-měřitelných zobrazení. Nechť $f : \Omega \to X$ je takové, že $f_n \to f$ bodově s. v., a nechť $g \in L_1(\mu)$ je taková, že pro každé $n \in \mathbb{N}$ je $\|f_n(t)\| \leqslant g(t)$ pro s. v. $t \in \Omega$. Pak f je bochnerovsky integrovatelná a $(B)\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} (B)\int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$.*

Věta 110 (absolutní spojitost Bochnerova integrálu)**.** *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $f : \Omega \to X$ je bochnerovsky integrovatelné. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\big\|(B)\int_E f \,\mathrm{d}\mu\big\| < \varepsilon$ kdykoli $E \subset \Omega$ je taková, že $\mu(E) < \delta$.*

Věta 111. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X a Y jsou Banachovy prostory, $f : \Omega \to X$ je bochnerovsky integrovatelné a $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Pak $T \circ f$ je bochnerovsky integrovatelné a pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$ platí, že*

$$(B) \int_E T \circ f \,\mathrm{d}\mu = T\bigg((B) \int_E f \,\mathrm{d}\mu\bigg).$$

Speciálně, f je Pettisovsky integrovatelná a $(P) \int_E f \,\mathrm{d}\mu = (B) \int_E f \,\mathrm{d}\mu$ pro každou měřitelnou $E \subset \Omega$.

Konec 21. přednášky

4. Lebesgueovy-Bochnerovy prostory

Definice 112. Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Symbolem $L_p(\mu, X)$ označíme množinu všech silně měřitelných zobrazení z Ω do X takových, že $\|f\| \in L_p(\mu)$, faktorizovanou podle rovnosti μ-s. v.

Dále pro $f \in L_p(\mu, X)$ definujeme $\|f\|_{L_p(\mu,X)} = \big\|t \mapsto \|f(t)\|\big\|_{L_p(\mu)}$.

Věta 113. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

(a) $L_p(\mu, X)$ je Banachův prostor s normou $\|f\|_{L_p(\mu,X)}$.

(b) Je-li X Hilbertův prostor, pak $L_2(\mu, X)$ je Hilbertův prostor se skalárním součinem

$$\langle f, g\rangle_{L_2(\mu,X)} = \int_\Omega \langle f(t), g(t)\rangle \,\mathrm{d}\mu.$$

Poznámka: část (b) nebyla na přednášce dokázána

Věta 114. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor a $1 \leqslant p < \infty$.*

(a) Množina jednoduchých Bochnerovsky integrovatelných zobrazení z Ω do X je hustá v $L_p(\mu, X)$.

(b) Jsou-li X i $L_p(\mu)$ separabilní, je $L_p(\mu, X)$ také separabilní.

Konec 22. přednášky

Věta 115. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je Banachův prostor, $1 \leqslant p < \infty$ a q je sdružený exponent k p. Uvažujme zobrazení $I\colon L_q(\mu, X^*) \to L_p(\mu, X)^*$, $I(g) = \varphi_g$, kde*

$$\varphi_g(f) = \int_\Omega g(t)\big(f(t)\big) \,\mathrm{d}\mu(t), \quad f \in L_p(\mu, X).$$

Pak platí

(a) Zobrazení I je izometrie.

(b) Pokud je (Ω, μ) atomický a $p \neq 1$, pak I je na. Speciálně, $\ell_q(J, X^*)$ je izometrické $\ell_p(J, X)^*$ pro každou množinu J. Pokud μ je navíc σ-konečná míra, pak stejný výsledek platí i pro $p = 1$.

(c) Pokud je X reflexivní a $p \neq 1$, pak I je na. Pokud μ je navíc σ-konečná míra, pak stejný výsledek platí i pro $p = 1$.

Poznámka: byla dokázána jen část (a) pro $p \neq 1$

Věta 116. *Nechť (Ω, μ) je prostor s úplnou mírou, X je reflexivní prostor a $1 < p < \infty$. Pak $L_p(\mu, X)$ je reflexivní.*

IV. Konvexní kompaktní množiny

Definice 117. Nechť C je konvexní podmnožina vektorového prostoru. Řekneme, že neprázdná $F \subset C$ je *extremální podmnožinou C*, pokud žádný bod F není netriviální konvexní kombinací bodů z C, z nichž některý leží mimo E, tj. je-li $\lambda x + (1-\lambda) y \in F$ pro nějaká $x, y \in C$ a $\lambda \in (0, 1)$, pak $x, y \in F$.

Řekneme, že $x \in C$ je *extremálním bodem množiny C*, jestliže $\{x\}$ je extremální podmnožinou C. Množinu všech extremálních bodů C značíme $\operatorname{ext} C$.

Fakt 118. *Nechť C je konvexní podmnožina vektorového prostoru a $F \subset C$. Pak následující podmínky jsou ekvivalentní.*

(a) F je extremální podmnožinou C.

(b) Je-li $\frac{1}{2}(x + y) \in F$ pro nějaká $x, y \in C$, pak $x, y \in F$.

Konec 23. přednášky

Věta 119 (Krejnova-Milmanova)**.** *Nechť X je HLCS a nechť $K \subset X$ je kompaktní a konvexní. Pak $K = \overline{\operatorname{conv}} \operatorname{ext} K$.*

Definice 120. Ať $A \subset \mathbb{R}^d$. Symbolem $\operatorname{cone}(A)$ značíme množinu všech nezáporných lineárních kombinací prvků z A, kde nezáporná (resp. kladná) lineární kombinace prvků $x_1, \dots, x_m \in A$ je tvaru $\sum_{i=1}^m \alpha_i x_i$, kde $\alpha \geqslant 0$ (resp. $\alpha > 0$) pro každé $i \leqslant m$.

Věta 121. *Ať $A \subset \mathbb{R}^d$.*

(a) Každý nenulový vektor z $\operatorname{cone}(A)$ je možné vyjádřit jako kladnou lineární kombinaci lineárně nezávislých vektorů z A.

(b) Každý vektor z $\operatorname{conv}(A)$ je možné vyjádřit jako konvexní kombinaci $d+1$ vektorů z A.

(c) Je-li A kompaktní a konvexní podmnožina, pak každý bod $x \in A$ je konvexní kombinací nejvýše $d+1$ extremálních bodů množiny A.

Konec 24. přednášky

Příklad 122. Nechť K je kompaktní topologický prostor a $P(K)$ jsou pravděpodobnostní Radonovy míry na K, tj. $P(K) = \{\mu \in \mathcal{M}(K);\ \mu \geqslant 0, \mu(K) = 1\}$. Pak $(P(K), w^*) \subset (\mathcal{M}(K), w^*)$ je kompaktní konvexní množina a $\operatorname{ext} P(K) = \{\delta_x;\ x \in K\}$.

Definice 123. Nechť X je HLCS, $K \subset X$ je kompaktní konvexní množina a $\mu \in P(K)$. Bod $x \in K$ se nazývá *těžištěm* míry μ (značíme $x = r(\mu)$), pokud pro každou spojitou afinní $f : K \to \mathbb{R}$ platí, že

$$f(x) = \int_K f \, \mathrm{d}\mu.$$

Tvrzení 124. *Nechť X je HLCS, $K \subset X$ je kompaktní konvexní množina a $\mu \in P(K)$. Pak existuje právě jedno těžiště $r(\mu) \in K$ míry μ.*

Věta 125 (o integrální reprezentaci)**.** *Nechť X je HLCS a nechť $K \subset X$ je kompaktní a konvexní a $x \in K$. Pak existuje $\mu \in P(K)$ splňující že $r(\mu) = x$ a $\mu(\overline{\operatorname{ext} K}) = 1$.*

Konec 25. přednášky