VÝSLEDKY

I. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE - ÚVOD

Výsledky jsou uvedeny vždy ”až na konstantu”:

1. a) $\frac{x^{10}}{10} + \log|x| - 5e^x - \frac{1}{2x^2} - \sin x$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ b) $\frac{2}{3}e^{3x} + \frac{5(5-x)^{\frac{6}{5}}}{6},\ x \in \mathbb{R}$
c) $-\frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} - \frac{2}{x^3}$ na $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$

2. a) $-x^3\cos x + 3x^2\sin x + 6x\cos x - 6\sin x,\ x \in \mathbb{R}$ b) $x\log x - x,\ x \in (0, \infty)$ c) $\frac{1}{4}(2x^2\log x - x^2),\ x \in (0, \infty)$
d) $\frac{1}{2}(e^x\sin x + e^x\cos x),\ x \in \mathbb{R}$ e) $I_n := \int x^n e^x\,\mathrm{d}x = x^n e^x - nI_{n-1};\ I_1 := xe^x - e^x,\ x \in \mathbb{R}$
f) $\frac{1}{2}e^x(x\sin x + x\cos x - \sin x),\ x \in \mathbb{R}$

3. a) $-\log|\cos x|$ na každém z intervalů $(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), k \in \mathbb{Z}$
b) $\log|\sin x|$ na každém z intervalů $(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$
c) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2,\ x \in \mathbb{R}$ d) $\sqrt{x^2+5},\ x \in \mathbb{R}$ e) $\frac{1}{3}\operatorname{tg} x^3$ na každém z intervalů $(-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + k\pi}), k \in \mathbb{Z}$
f) $\log|\log x|$ na $(0, 1)$ a $(1, \infty)$ g) $\log|\log(\log x)|$ na $(1, e)$ a (e, ∞)

4. a) $\frac{1}{2}|x|x,\ x \in \mathbb{R}$ c) $\frac{1}{4}|x|x^3,\ x \in \mathbb{R}$ b) $F(x) = \begin{cases} \sin x + 4k & x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z} \\ -\sin x + 4k + 2 & x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
d) $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\cos(2x-1) & x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\cos(2x-1) - 1 & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

II. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE - PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

Výsledky jsou uvedeny vždy ”až na konstantu” (primitivní funkce je vždy definována na každém maximálním intervalu v D_f):

1. $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}},\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ **2.** $2x - \frac{12}{5}\sqrt[6]{72x^5} + \frac{3}{2}\sqrt[3]{9x^2},\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ **3.** $\frac{4^x}{\log 4} + 2\frac{6^x}{\log 6} + \frac{9^x}{\log 9},\ D_f = \mathbb{R}$
4. $x - \operatorname{arctg} x,\ D_f = \mathbb{R}$ **5.** $-\frac{2}{5}\sqrt{2-5x},\ D_f = (-\infty, \frac{2}{5})$ **6.** $\frac{1}{4}\operatorname{arctg}(x^3),\ D_f = \mathbb{R}$ **7.** $\cos(\frac{1}{x}),\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$
8. $\frac{2}{\sqrt{\cos x}},\ D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$ **9.** $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27},\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}\}$ **10.** $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x,\ D_f = \mathbb{R}$
11. $-\frac{1}{2\log\frac{2}{3}}\log|1 - (\frac{2}{3})^{2x}|,\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ **12.** $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2),\ D_f = \mathbb{R}$
13. $-\frac{2x^2-1}{4}\cos(2x) + \frac{x}{2}\sin(2x),\ D_f = \mathbb{R}$ **14.** $\frac{2}{3}x^{3/2}\left(\log^2 x - \frac{4}{3}\log x + \frac{8}{9}\right),\ D_f = (0, \infty)$
15. $-\frac{e^{-2x}}{2}(x^2 + x + \frac{1}{2}),\ D_f = \mathbb{R}$ **16.** $-\frac{1}{x}(\log^2 x + 2\log x + 2),\ D_f = (0, \infty)$ **17.** $\frac{1}{3}(x^3-1)e^{x^3},\ D_f = \mathbb{R}$
18. $2(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}},\ D_f = (0, \infty)$ **19.** $2(6-x)\sqrt{x}\cos\sqrt{x} - 6(2-x)\sin\sqrt{x},\ D_f = (0, \infty)$

III. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE - INTEGRACE RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ

Výsledky jsou uvedeny vždy ”až na konstantu” (primitivní funkce je vždy definována na každém maximálním otevřeném intervalu v D_f):

1. a) $5\log|x-8|,\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{8\}$ b) $-5\frac{1}{2(x-8)^2},\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{8\}$ c) $\log(x^2+x+4),\ D_f = \mathbb{R}$
d) $3\operatorname{arctg}(x+1),\ D_f = \mathbb{R}$ e) $-2\log(x^2-6x+11) - 11\sqrt{2}\operatorname{arctg}(\frac{x-3}{\sqrt{2}}),\ D_f = \mathbb{R}$ f) $-\frac{1}{x^2+x+4},\ D_f = \mathbb{R}$
g) $\frac{3(x+1)}{2(x^2+2x+2)} + \frac{3\operatorname{arctg}(x+1)}{2},\ D_f = \mathbb{R}$ h) $\frac{2}{(x^2-6x+11)} - \frac{11\sqrt{2}}{4}\left[\frac{2\frac{x-3}{\sqrt{2}}}{x^2-6x+11} + \operatorname{arctg}(\frac{x-3}{\sqrt{2}})\right],\ D_f = \mathbb{R}$

2. a) $\frac{1}{6}\left(\frac{12}{5}\log|x+\frac{3}{2}| + \frac{18}{5}\log|x+\frac{2}{3}| - 6\log|x+1|\right),\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-\frac{3}{2}, -1, -\frac{2}{3}\}$
b) $5\frac{x^2}{2} - 7x + 8\log|x+1| + 2\frac{1}{x+1},\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ c) $x + \log|x-1| - \log|x+1|,\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$
d) $\frac{1}{3}\left(\log|x+1| - \frac{1}{2}\log(x^2-x+1)\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}),\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$
e) $\frac{5x+2}{3(x^2+x+1)} + \frac{2}{9}\log|x-1| - \frac{1}{9}\log(x^2+x+1) + \frac{8}{3\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}),\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$
f) $\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 10x + 20\log|x-1| - 15\frac{1}{x-1} - 3\frac{1}{(x-1)^2},\ D_f = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

3. a) $2\sqrt{x}-2\log(1+\sqrt{x}),\ D_f=(0,\infty)$ `[dá se řešit substitucí` $t=\sqrt{x}$`]`
b) $6\sqrt[6]{x+1}-3(\sqrt[6]{x+1})^2-2(\sqrt[6]{x+1})^3+\frac{3}{2}(\sqrt[6]{x+1})^4+\frac{6}{5}(\sqrt[6]{x+1})^5-\frac{6}{7}(\sqrt[6]{x+1})^7+3\log(1+(\sqrt[6]{x+1})^2)-6\operatorname{arctg}(\sqrt[6]{x+1}),\ D_f=(-1,\infty)$ `[dá se řešit substitucí` $t=\sqrt[6]{x+1}$`]`
c) $\frac{3}{4}(\sqrt[3]{2+x})^4-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{2+x})^2-\frac{3}{4}\log|\sqrt[3]{2+x}-1|+\frac{15}{8}\log((\sqrt[3]{2+x})^2+\sqrt[3]{2+x}+2)-\frac{27}{8\sqrt{7}}\operatorname{arctg}(\frac{2(\sqrt[3]{2+x})+1}{\sqrt{7}}),\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ `[dá se řešit substitucí` $t=\sqrt[3]{2+x}$`]`
4. a) $\frac{1}{4}\log\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|-\frac{1}{2(\cos x+1)},\ D_f=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$ `[dá se řešit substitucí` $t=\cos x$`]`
b) $\operatorname{tg}x+\log\left|\frac{\operatorname{tg}x}{(\operatorname{tg}x+1)^2}\right|,\ D_f=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi,3\frac{\pi}{4}+k\pi\}$ `[dá se řešit substitucí` $t=\operatorname{tg}x$`]`
c) $F(x)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}(\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{tg}(\frac{x}{2})) & x\in(-\pi+2k\pi,\pi+2k\pi),k\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{2\sqrt{6}}+k\frac{\pi}{\sqrt{6}} & x=\pi+2k\pi,k\in\mathbb{Z}\end{cases}$
`[dá se řešit substitucí` $t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$`]`

5. viz. výsledky ze zkouškových písemek z roku 2005/2006
(http://www.karlin.mff.cuni.cz/ kalenda/pis-fsv/0506/pismiii.htm)
6. a) $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-1}{2-x}}-\sqrt{(2-x)(x-1)},\ D_f=(1,2)$ b) $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{x-3}{6-x}},\ D_f=(3,6)$
c) $3\sqrt[3]{x+2}-\frac{3}{5}\log(\sqrt[3]{x+2}+1)+\frac{48}{5}\log|\sqrt[6]{x+2}+2|+\frac{48}{5}\log|\sqrt[6]{x+2}-2|,\ D_f=\mathbb{R}\setminus\{-3,62\}$
d) $\frac{3}{2}\log(\cos^2x+1)-\log|\cos x|,\ D_f=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{2}+k\pi\}$
e) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}x+\frac{2}{3\sqrt{3}}(\log|\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1|-\log|\sqrt{3}\operatorname{tg}x+1|),\ D_f=\mathbb{R}\setminus\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{6}+k\pi,-\frac{\pi}{6}+k\pi\}$

IV. URČOVÁNÍ POVAHY KVADRATICKÝCH FOREM

1. a) ID b) PD c) ID d) PSD, ne PD e) ID f) ND g) PD h) PSD, ne PD i) ID
2. viz. výsledky ze zkouškových písemek z roku 2005/2006
(http://www.karlin.mff.cuni.cz/ kalenda/pis-fsv/0506/pismiii.htm)