

## I. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE - ÚVOD

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. Příklady na integrování "přímo":

a)  $\int x^9 + \frac{1}{x} - 5e^x + x^{-3} - \cos x \, dx$    b)  $\int 2e^{3x} - \sqrt[5]{5-x} \, dx$    c)  $\int \frac{x^2+3x+6}{x^4} \, dx$

2. Příklady na integrování "per partes":

a)  $\int x^3 \sin x \, dx$    b)  $\int e^x \cos x \, dx$    c)  $\int \log x \, dx$    d)  $\int x^n e^x \, dx, n \in \mathbb{N}$    e)  $\int x \log x \, dx$    f)  $\int x e^x \cos x \, dx$

3. Příklady na integrování pomocí substituce:

a)  $\int \operatorname{tg} x \, dx$    b)  $\int \operatorname{cotg} x \, dx$    c)  $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} \, dx$    d)  $\int \frac{x}{1+x^4} \, dx$    e)  $\int \frac{1}{x \log x} \, dx$    f)  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \, dx$    g)  $\int \frac{1}{x \log x \log(\log x)} \, dx$

4. Příklady, kde se musí funkce "lepit":

a)  $\int |x| \, dx$    b)  $\int |\cos x| \, dx$    c)  $\int \sqrt{x^6} \, dx$    d)  $\int \sin |2x-1| \, dx$

## II. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE - PŘÍKLADY K PROCVIČENÍ

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1.  $\int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x} \sqrt{x} \, dx$    2.  $\int \frac{(\sqrt{2x} - \sqrt[3]{3x})^2}{x} \, dx$    3.  $\int (2^x + 3^x)^2 \, dx$    4.  $\int \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$    5.  $\int \frac{1}{\sqrt{2-5x}} \, dx$    6.  $\int \frac{x^3}{x^8+1} \, dx$   
7.  $\int \frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x}) \, dx$    8.  $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} \, dx$    9.  $\int \frac{x^2}{(8x^3+27)^{2/3}} \, dx$    10.  $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \, dx$    11.  $\int \frac{2^{2x}}{9^x - 4^x} \, dx$    12.  $\int \operatorname{arctg} x \, dx$   
13.  $\int x^2 \sin(2x) \, dx$    14.  $\int \sqrt{x} \log^2 x \, dx$    15.  $\int x^2 e^{-2x} \, dx$    16.  $\int (\frac{\log x}{x})^2 \, dx$    17.  $\int x^5 e^{x^3} \, dx$    18.  $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$   
19.  $\int x \sin \sqrt{x} \, dx$

## III. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE - INTEGRACE RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

1. Příklady na "integrování parciálních zlomků":

a)  $\int \frac{5}{x-8} \, dx$    b)  $\int \frac{5}{(x-8)^3} \, dx$    c)  $\int \frac{2x+1}{x^2+x+4} \, dx$    d)  $\int \frac{3}{x^2+2x+2} \, dx$    e)  $\int \frac{-4x-10}{x^2-6x+11} \, dx$    f)  $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+4)^2} \, dx$   
g)  $\int \frac{3}{(x^2+2x+2)^2} \, dx$    h)  $\int \frac{-4x-10}{(x^2-6x+11)^2} \, dx$

2. Příklady na "integrování racionálních funkcí":

a)  $\int \frac{1}{(2x+3)(3x+2)(x+1)} \, dx$    b)  $\int \frac{5x^3+3x^2-x-1}{x^2+2x+1} \, dx$    c)  $\int \frac{x^2+1}{x^2-1} \, dx$    d)  $\int \frac{1}{x^3+1} \, dx$    e)  $\int \frac{x^2+3x-2}{(x-1)(x^2+x+1)^2} \, dx$   
f)  $\int \frac{x^5+x^4+x^3+x^2+x+1}{x^3-3x^2+3x-1} \, dx$

3. Příklady s odmocninami, které po vhodné substituci vedou na "integrování racionálních funkcí":

a)  $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}} \, dx$    b)  $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} \, dx$    c)  $\int \frac{x \sqrt[3]{2+x}}{x+\sqrt[3]{2+x}} \, dx$

4. Příklady s goniometrickými funkcemi, které po vhodné substituci vedou na "integrování racionálních funkcí":

a)  $\int \frac{1}{\sin x + \operatorname{tg} x} \, dx$    b)  $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x + 1}{\sin^2 x + \sin x \cos x} \, dx$    c)  $\int \frac{1}{5+\cos x} \, dx$

5. BONUS - příklady ze zkuškových písemek:

a)  $\int \frac{2x}{(2x+3)(\sqrt{2x+3} + \sqrt[3]{2x+3})} \, dx$    b)  $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x (\sin^2 x + 1)} \, dx$    c)  $\int \frac{1}{(\sqrt{x^2+x+7-x})^3 + \sqrt{x^2+x+7-x}} \, dx$    d)  $\int \frac{\cos x - 1}{\sin x - 1} \, dx$

## III. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE - INTEGRACE RACIONÁLNÍCH FUNKCÍ

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

6. Příklady, které po vhodné substituci vedou na "integrování parciálních zlomků":

$$\text{a) } \int \sqrt{\frac{x-1}{2-x}} dx \quad \text{b) } \int \frac{1}{x-3} \sqrt{\frac{x-3}{6-x}} dx \quad \text{c) } \int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2-3} \sqrt[3]{x+2-4}} dx \quad \text{d) } \int \frac{\sin^3 x + \sin x}{\cos^3 x + \cos x} dx \quad \text{e) } \int \frac{1}{\cos^2 x (4 \sin^2 x - 1)} dx$$

#### IV. URČOVÁNÍ POVAHY KVADRATICKÝCH FOREM

1. Zjistěte, zda následující matice jsou pozitivně definitní, negativně definitní atd.

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{c) } \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{d) } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{f) } \begin{pmatrix} -10 & 1 & 1 \\ 1 & -10 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{g) } & \begin{pmatrix} 10 & 1 & 3 \\ 1 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{h) } \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 10 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{i) } \begin{pmatrix} -3 & -1 & 3 \\ -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Příklady ze zkouškových písemek - určete zda je následující matice pozitivně definitní, negativně definitní atd. a spočítejte hodnotu příslušné kvadratické formy v zadané dvojici vektorů:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 30 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{b) } \begin{pmatrix} 8 & 16 & 16 & 16 \\ 16 & 8 & 0 & 16 \\ 16 & 0 & 8 & 16 \\ 16 & 16 & 16 & 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$