# VÝSLEDKY

## III. PARCIÁLNÍ DERIVACE

**1.** $\frac{\partial f}{\partial x} = mx^{m-1}y^n$, $\frac{\partial f}{\partial y} = nx^m y^{n-1}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. **2.** $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. **3.** $\frac{\partial f}{\partial x} = y+z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x+y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x+y$ pro $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. **4.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = |y| \operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = |x| \operatorname{sgn} y$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistují. **5.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sgn}(y+\cos x)\cdot \sin x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sgn}(y+\cos x)$, pokud $y \neq -\cos x$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, -\cos x)$ neexistuje pro $x \in \mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(k\pi, (-1)^{k+1}) = 0$ pro $k \in \mathbb{Z}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x, -\cos x)$ neexistuje pro $x \neq k\pi$. **6.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x \operatorname{sgn}(\sin x - \sin y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\cos y \operatorname{sgn}(\sin x - \sin y)$, pokud $\sin x \neq \sin y$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+l\pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+l\pi) = 0$. V ostatních bodech parciální derivace neexistují. **7.** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\cos x \operatorname{sgn}(\cos y - \sin x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin y \operatorname{sgn}(\cos y - \sin x)$, pokud $\sin x \neq \cos x$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2}+k\pi, (k+2l)\pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2}+k\pi+2l\pi, k\pi) = 0$. V ostatních bodech parciální derivace neexistují. **8.** Pokud $x,y>0$ nebo $x,y<0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{zx}{y^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^{z}\cdot\log\frac{x}{y}$. **9.** Pokud $x>0$ a $z \neq 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}}\cdot\log x\cdot\frac{1}{z}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = -x^{\frac{y}{z}}\cdot\log x\cdot\frac{y}{z^2}$. **10.** Pokud $x>0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x^y)\cdot x^{y-1}\cdot y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x^y)\cdot x^y \cdot \log x$. **11.** $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-\frac{\pi}{x^2+3xy+3y^2}}\cdot\frac{\pi(2x+3y)}{(x^2+3xy+3y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-\frac{\pi}{x^2+3xy+3y^2}}\cdot\frac{\pi(3x+6y)}{(x^2+3xy+3y^2)^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$; v bodě $(0,0)$ jsou obě parciální derivace nulové. **12.** Pokud $x > -y^2$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x+y^2}}$. Jinak parciln derivace nemaj smysl. **13.** Pokud $|x|>|y|$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}}$. V bodech $[x,x]$ a $[x,-x]$ nem $\frac{\partial f}{\partial y}$ smysl; $\frac{\partial f}{\partial x}$ nem smysl krom bodu $[0,0]$, tam ale neexistuje.
**14. - 17.**viz. vsledky zkoukov psemky z roku 2008/2009, varianty C, A a z roku 2004/2005 varianty B, D http://www.karlin.mff.cuni.cz/ kalenda/edu.php?edutype=archpis

## IV. EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH - BEZ LAGRANGEOVÝCH MULTIPLIKÁTORU

**1.** max $-2$ v bodě $[1,0]$, min $-5$ v bodě $[0,1]$ **2.** a) max 5 v bodě $[1,1,0]$, min $-6$ v bodech $[-1,-1,1]$, $[-1,-1,-1]$; b) max 5 v bodech $[\pm1,\pm1,1]$, min $-1$ v bodě $[0,0,-1]$ **3.** max 1 v bodech $[\pm1,0]$, $[0,\pm1]$, min 0 v bodě $[0,0]$ **4.** max $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$, min $-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $[-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$ **5.** a) sup neexistuje, min 1 v bodě $[-1,0]$; b) sup neexistuje, inf neexistuje; c) max 5 v bodě $[\frac{3}{4},0]$ **6.** sup neexistuje, min $-14$ v bodě $[-1,-2,3]$ **7.** a) max $\frac{1}{e}$ v bodech kružnice $x^2+y^2=1$, min 0 v bodě $[0,0]$; b) max $\frac{5}{e}$ v bodech $[0,\pm1]$, min 0 v bodě $[0,0]$ **8.** max 1 v bodech $[\pm1,0]$, min $\frac{1}{4}$ v bodech $[0,\pm\frac{1}{2}]$ **9.** max $\frac{17}{4}$ v bodech $[\frac{3}{10},\frac{4}{5}]$, $[-\frac{3}{10},-\frac{4}{5}]$, min $-2$ v bodech $[\frac{2}{5},-\frac{3}{5}]$, $[-\frac{2}{5},\frac{3}{5}]$ **10.** max $\frac{25}{4}$ v bodě $[\frac{5}{2},\frac{5}{2}]$, inf neexistuje **11.** max 300 v bodech $[0,\pm10,0]$, min $-100$ v bodech $[0,0,\pm10]$ **12.** sup $\frac{1}{2e}$, nenabývá se, inf 0, nenabývá se

## IV. EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH - S LAGRANGEOVÝMI MULTIPLIKÁTORY

**1.** a) max 3 v $[\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}]$, min $-3$ v $[-\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}]$; b) max $\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $[\frac{2}{\sqrt{78}},-\frac{7}{\sqrt{78}},\frac{5}{\sqrt{78}}]$, min $-\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $[-\frac{2}{\sqrt{78}},\frac{7}{\sqrt{78}},-\frac{5}{\sqrt{78}}]$; **2.** max $\frac{1}{8}$ v $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]$, inf 0, nenabývá se **3.** max $\frac{a^6}{6^6}$ v $[\frac{a}{6},\frac{a}{6},\frac{a}{6}]$, inf $-\infty$ **4.** max $\sqrt{102}$ v $[\frac{1}{\sqrt{102}},-\frac{1}{\sqrt{102}},\frac{10}{\sqrt{102}}]$; min $-\sqrt{102}$ v $[-\frac{1}{\sqrt{102}},\frac{1}{\sqrt{102}},-\frac{10}{\sqrt{102}}]$;

## V. IMPLICITNÍ FUNKCE

**1.**$f'(0)=2$, $f''(0)=-14$ **2.** ten rovina je $z=\frac{7}{5}(y+2)+1$ **3. - 5.**viz. zkouškové písemky z minulých let

## VI. MATICE - HODNOST, INVERZE, DETERMINANT

**1.** a) 3 b) 3 pro $a\neq1$, 1 pro $a=1$ c) 3 pro $a\neq0,-1,2$, jinak 2

**2.** a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, b) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

**3.** a) -36 b) 1 c) 1

## VI. MATICE - SOUSTAVY ROVNIC

**1.** a) $x = 5$, $y = -3$, $z = -2$ b) (1,2,3) c) (5,-3,3,6) **2.** (1,0,2,0)

## VII. MATICE - PŘÍKLADY Z MINULÝCH LET

viz. výsledky zkouškové písemky z roku 2008/2009, varianty C, A a z roku 2004/2005 varianty B, D

## VIII. ŘADY

**1.** Absolutně konverguje (AK) **2.** Diverguje (D) **3.** AK **4.** AK **5.** Absolutně konverguje pro $A < e$, diverguje pro $A > e$ **6.** D **7.** AK **8.** AK pro všechna $x \in \mathbb{R}$ **9.** AK pro $|x| > 1$, D pro $|x| \leq 1$ **10.** AK pro $|x| \leq 1$, D pro $|x| > 1$ **11.** AK pro $x < 0$, D pro $x \geq 0$ **12.** AK pro $x \leq 0$, D pro $x > 0$ **13.** AK pro $a > 1$, D pro $a < 1$ **14.** D **15.** AK **16.** D **17.** D **18.** D **19.** AK **20.** AK pro $x \notin \{1, -1\}$ jinak D **21.** D **22.** AK **23.** AK **24.** AK **25.** Konverguje neabsolutně **26.** AK pro $A \in \langle 0, 1)$, D pro $A \geq 1$ **27.** Konverguje neabsolutně **28.** Konverguje neabsolutně **29.** AK **30.** AK pro $x < -1$, jinak D **31.** Konverguje neabsolutně