

1. Řešte následující nerovnosti a rovnost v \mathbb{R} :

- a) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1, \quad \frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6},$
 b) $\log_{\frac{1}{8}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0, \quad \log(x^2 + 1) = 2 \log(3 - x),$
 c) $\sin 2x < \cos x.$

2. Dokažte indukcí následující formulky:

- a) $\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1), \quad \sum_{k=1}^n k^3 = (1+2+\dots+n)^2,$
 c) $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, \quad q \neq 1,$
 d) $(1+x)^n \geq 1+nx, \quad x > 1, \quad (\text{Bernoullihonerovnost})$
 e) $(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha, \quad (\text{Moivreuv vzorec})$
 f) $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$

3. Dokažte pro $a, b \in \mathbb{R}$:

$$|a+b| \leq |a|+|b|, \quad ||a|-|b|| \leq |a-b|.$$

II. VÝROKOVÁ LOGIKA

1. Nechť M značí množinu všech mužů a Z množinu všech žen. Uvažujme následující výrokové formy: $S(m, z)$: „Muž m je manželem ženy z .“; $L_1(m, z)$: „Muž m miluje ženu z .“; $L_2(m, z)$: „Žena z miluje muže m .“ Pomocí kvantifikátorů, logických spojek a forem S, L_1 a L_2 запиšte následující výroky:

- a) Každý ženatý muž miluje svou manželku.
 b) Každou ženu miluje nějaký muž.
 c) Každá žena má nejvýš jednoho manžela.
 d) Každý muž má nejvýš jednu manželku. (Říká tento výrok totéž, co c)?)
 e) Existuje vdaná žena.
 f) Existuje ženatý muž. (Říká tento výrok totéž, co e)?)
 g) Existují nevěrné manželky. (Manželku prohlásíme za nevěrnou, pokud miluje jiného muže než svého manžela.)

Následující výroky přeložte do češtiny.

- h) $\exists m \in M \forall z \in Z (\text{non}S(m, z));$
 i) $\exists z \in Z \forall m \in M (L_1(m, z) \Rightarrow \text{non}L_2(m, z));$
 j) $\exists z \in Z \forall m \in M (L_2(m, z) \Rightarrow \text{non}L_1(m, z));$
 k) $\forall z \in Z ((\exists m \in M : L_2(m, z)) \Rightarrow (\exists m \in M : L_1(m, z) \& \text{non}L_2(m, z))).$

2. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.

- a) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} (z > x \Rightarrow y < z);$
 b) $\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} (z > x \Rightarrow y < z);$
 c) $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} (z > x \Rightarrow y < z);$
 d) $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} (z < x \Rightarrow y > z);$
 e) $\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{R} (|y-x| < \delta \Rightarrow y < x + \frac{\varepsilon}{3}).$

3. Vyjádřete co nejjednodušeji:

- a) $\forall \varepsilon > 0 \forall y \in \mathbb{R} : |y-7| < 5 \Rightarrow |f(y)-15| < \varepsilon;$
 b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists \delta > 1 \forall y \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : |y-x| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \frac{1}{n}.$

4. Necht' je dáno $a \in \mathbb{R}$. Nalezněte takové $\delta > 0$, že pro libovolné $x \in \mathbb{R}$ platí:

$$|x| < \delta \Rightarrow |1 - ax| < 2$$

Na základě předchozího výpočtu pak rozhodněte, zda platí následující výroky:

- a) $\forall a \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (|x| < \delta \Rightarrow |1 - ax| < 2)$ b) $\exists a \in \mathbb{R} \exists \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (|x| < \delta \Rightarrow |1 - ax| < 2)$
 c) $\forall a \in \mathbb{R} \forall \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (|x| < \delta \Rightarrow |1 - ax| < 2)$ d) $\exists a \in \mathbb{R} \forall \delta > 0 \forall x \in \mathbb{R} (|x| < \delta \Rightarrow |1 - ax| < 2)$
 e) $\exists a \in \mathbb{R} \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} (|x| < \delta \ \& \ |1 - ax| \geq 2)$ f) $\forall a \in \mathbb{R} \forall \delta > 0 \exists x \in \mathbb{R} (|x| < \delta \ \& \ |1 - ax| < 2)$

5. Logické hádanky:

- a) Král měl dva syny Abela a Benjamina, dceru žádnou. Jednou byli princové zajati zlým obrem. „Který z vás je dědicem trůnu?“ zeptal se obr. „Já jsem Abel, králův nejstarší.“ řekl princ s černými vlasy. „Já jsem Benjamin, králův druhorozený.“ řekl princ se zrzavými vlasy. Jestliže alespoň jeden z nich lhal, kdo to byl?
- b) „Zhltl jsem sto lidí.“ vychloubal se obr. „Podle mě jich muselo být méně než sto.“ řekl Abel. „No, já předpokládám, že to byl nejméně jeden člověk.“ řekl Benjamin. Jestliže jenom jeden z nich mluvil pravdu, kolik lidí obr skutečně snědl?
- c) Byla tři zvířata - osel, kozel a velbloud. Každé zvíře neslo buď soudky s olejem, nebo svazky datlí.
- Jestliže osel nesl datle, pak kozel nesl olej.
 - Jestliže osel nesl olej, pak velbloud vezl datle.
 - Jestliže kozel vezl datle, pak velbloud vezl olej.

Kdo v každém případě nesl stejný náklad? Jaké jsou přípustné kombinace rozložení nákladů na jednotlivých zvířatech?

III. NAJDĚTE SUPREMA A INFIMA NÁSLEDUJÍCÍCH MNOŽIN (POKUD EXISTUJÍ). EXISTUJÍ MAXIMA A MINIMA?

1. $A = \{p/(p+q); p \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{N}\}$
 2. a) $B_1 = \{\sin x; x \in (0, 2\pi)\}$, b) $B_2 = \{\sin x; x \in (0, \pi)\}$, c) $B_3 = \{\sin x; x \in (0, \pi)\}$.
 3. a) $C_1 = \{n^2 - m^2; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$, b) $C_2 = \{n^2 - m^2; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n > m\}$,
 c) $C_3 = \{n^2 - m^2; n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$,
 4. a) $D_1 = \{2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{N}\}$, $D_2 = \{2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{Z}\}$.
 5. $E = \{5^{(-1)^j 3^k}; j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$
 6. a) $F_1 = \{\cos(n + \frac{1}{n})\pi; n \in \mathbb{N}\}$, b) $F_2 = \{\cos(n + \frac{1}{n})\pi; n \in \mathbb{N} \text{ sudé}\}$, c) $F_3 = \{\cos(n + \frac{1}{n})\pi; n \in \mathbb{N} \text{ liché}\}$
7. Necht' $A, B \subset \mathbb{R}$ a $S = \sup A$, $s = \inf A$, $T = \sup B$, $t = \inf B$. Co lze říci o supremu a infimu následujících množin?
 a) $A \cup B$, b) $A \cap B$, *c) $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$, d) $-A = \{-a \mid a \in A\}$, *e) $A \cdot B = \{a \cdot b \mid a \in A, b \in B\}$,
 f) $A - B$, g) $A \setminus B$, h) $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

IV. LIMITY POSLOUPNOSTÍ

1. **Z definice limity dokažte:** a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \frac{2n}{n^3 + 1} = 0$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n\frac{\pi}{7})}{n^2} = 0$
2. **Dokažte, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá vlastní limitu:** a) $a_n = 2^{(-1)^n n}$ b) $a_n = (-1)^n (\frac{1}{10} - \frac{1}{n})$
3. **Spočtete následující limity posloupností:** a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n}{n^3 - 7n + 7}$
- c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3 + 1}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+11} - \sqrt[3]{n})$
- f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n}$ h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!}$ i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5}{n^6 + n!}$ j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$
- k) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + 2 + \dots + n}{n + 2} - \frac{n}{2} \right)$ l) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$ m) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4}$
- n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a}$, ($a \geq 0$) o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A^n + B^n + C^n}$, ($A, B, C > 0$)

q) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n [kx]}{n^2}, x \in \mathbb{R}$ r) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$ s) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + [\sqrt[3]{n}]^3}{n - [\sqrt{n+9}]}$ t) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!}$

4. Spočítejte následující limity posloupností (jedná se o příklady, které byly u zkuškových písemek v minulých letech):

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n^{10} + n^3)^7 - (n^7 + 1)^{10}) \cdot \left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n^9}\right)^7} - 1 \right)^7$
b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + \frac{2}{n})^{30} - (n + \frac{1}{n})^{30}}{\sqrt{(2 + n^7)^8 - 2^8}}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \dots + [n\sqrt{n}]}$
d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(25 + \frac{1}{n}\right)^6 - \left(5 + \frac{1}{n}\right)^{12} \right) \cdot \sqrt[6]{(n+2)^7 - (n-1)^7}$
e) $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n^5 + 2)^{25} - (n+5)^{125}) \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{25n^4}\right)^{125} - 1 \right)^{31}$
f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 17\sqrt[6]{n}} - \sqrt{n^5 - 5\sqrt[6]{n} + 1}}{\sqrt[3]{n^5 + 18n - 16} - \sqrt[3]{n^5 - 9n}}$ g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 15n^2} - \sqrt{n^4 + 2n^2 + 1}}{\sqrt[3]{n^3 + 20n^2 + 5} - \sqrt[3]{n^3 - 6n^2 + 100}}$
h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 3)^{50} - (n + \frac{1}{n})^{100}}{(n+2)^{99} - (n+3)^{99}}$

V. LIMITY FUNKCÍ

Spočítejte následující limity funkcí (nebo dokažte, že neexistují):

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 8x + 15}$ 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$ 3. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9} - 2}$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+mx)^n - (1+nx)^m}{x^2}, (m, n \in \mathbb{N})$ 5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x-1}, (n \in \mathbb{N})$ 6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x}$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+ax} - \sqrt[n]{1+bx}}{x}, (m, n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{R})$ 8. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}, (m, n \in \mathbb{N})$ 9. $\lim_{x \rightarrow 1} ([x] - x)$
10. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left[\frac{1}{x}\right]$ 11. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin^2 x + \sin x - 1}{2\sin^2 x - 3\sin x + 1}$ 12. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(x - \frac{\pi}{3})}{1 - 2\cos x}$ 13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ 14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{\sin \beta x}$
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x} - \sqrt{\cos x}}$ 16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$ 17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ 18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos \alpha x)}{\log(\cos \beta x)}$
19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \cos x}{x^2}$ 20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x+1}\right)^{x^2}$ 21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$ 22. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\cot^2 x}$ 23. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$
24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^2 - x + 1)}{\log(x^{10} + x + 1)}$ 25. $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sqrt{\left|\cos \frac{1}{x}\right|}$ 26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x})}{\log(1 + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x})}$ 27. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x^{\operatorname{tg} 2x}$
28. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(x - \frac{\pi}{4})^2}$ 29. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(x - \frac{\pi}{4})^3}$ 30. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x \cdot 2^x}{1+x \cdot 3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ 31. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(1+2^x) \cdot \log\left(1 + \frac{3}{x}\right)$
32. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x-1})$ 33. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ 34. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\sin x)}$
35. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{(1-x)^\alpha}$ 36. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin^2(\pi \cdot 2^x)}{\log \cos(\pi \cdot 4^x)}$ 37. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sin x}$ 38. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^x - \sqrt{1 + \sin^3 x}}{x^3}$

V. LIMITY FUNKCÍ - ze zkuškových písemek

Spočítejte následující limity funkcí nebo dokažte, že neexistují (jedná se o příklady, které byly u zkuškových písemek vloni)

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1 + \cos x)^x + 1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ 2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1 + x^3 + 3^x + x^x)}{\log(1 + x^3 + 3^x) \log(1 + x^3)}$ 3. $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x \cdot \log(\sin^2 x)}{\sqrt{1 + \sin x}}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^n + n^{n+1} + \dots + n^{2n}}}{(1 - \cos \frac{3}{n})}$ 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \cos x \cdot \log(\cos x)} - \sqrt{1 + \log(\cos x)}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\sin x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sin^2 x}$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + \sin n} - \sqrt{n^3 + 3n}}{\sqrt[4]{n^2 + n} - \sqrt[4]{n^2 + \arctg n}} \quad 7. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{2} \right)^{\operatorname{tg}^2 2x}$$

VI. SPOJITOSTI A DERIVACE

Vyšetřete spojitost a najděte derivaci funkce $f(x) =$

$$1. (x^2 + 51x + 119)^{87} \quad 2. (x + 15)^3(x - 17)^{10}x^9 \quad 3. \frac{e^{x^2+1} \cdot \cos x}{(x+1)^2 \cdot \log(x^2+1)} \quad 4. \log(x^2 + x + 1) \quad 5. \sin(\cos((x^3 + 17x^2 - 56x + 1)^{18}))$$

$$6. \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}} \quad 7. (\sin x)^{\cos x} \quad 8. \log \arccos x \quad 9. x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \arctg \sqrt{x} - \sqrt{x} \quad 10. \arctg e^x - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$$

VI. SPOJITOSTI A DERIVACE - některé příklady z loňských písemek

Vyšetřete spojitost a najděte derivaci funkce $f(x) =$

$$1. \max\{5x - 4, x^2\} \quad 2. [x] \cdot \sqrt[3]{x^2 - 9} \quad 3. |\cos 2x| \cdot (\operatorname{tg} x - 1)$$

VII. PRŮBĚH FUNKCE

Vyšetřete průběh funkce $f(x) =$

$$1. \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1} \quad 2. \arccos\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$$

Některé příklady na průběh funkce z loňských písemek

$$3. (3^{x+2|x|} - 9)^2 \quad 4. \arctg \frac{x^2}{x^2-6} \quad 5. (x + \log 2) \cdot 2^{-\frac{5}{x}}$$