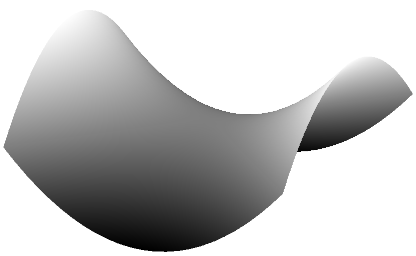
I. VRSTEVNICE FUNKCE, OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY

1. Určete a nakreslete definiční obor a vrstevnice funkcí:

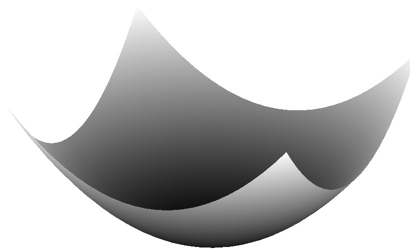
a) $f(x,y) = x + \sqrt{y}$ b) $f(x,y) = \frac{y}{x}$ c) $f(x,y) = x^2 + y^2$ d) $f(x,y) = x^2 - y^2$ e) $f(x,y) = \sqrt{xy}$
f) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ g) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$ h) $f(x,y) = \sqrt{(x^2+y^2-1)(4-x^2-y^2)}$
i) $f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y)^2}$ j) $f(x,y) = \sqrt{\sin(x^2+y^2)}$ k) $f(x,y) = \operatorname{sgn}(\sin x \cdot \sin y)$ l) $f(x,y) = |x| + y$

2. Přiřaďte grafy funkcí k předpisům:

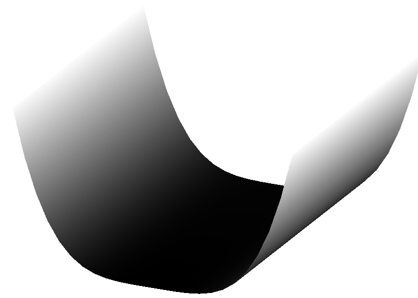
a)



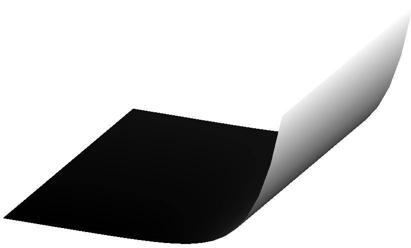
b)



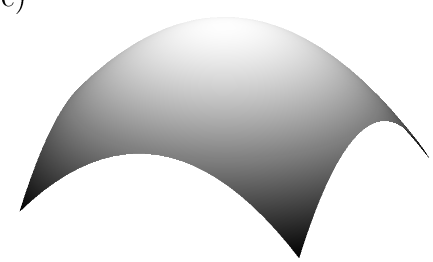
c)



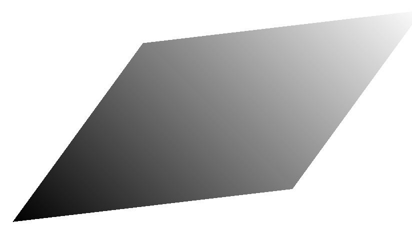
d)



e)



f)



i) $x^2 + y^2$ ii) $exp(x) + y$ iii) $-x^2 - y^2$ iv) $x + y$ v) $x^2 - y^2$ vi) $x^4 + y$

3. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené ev. uzavřené a určete vnitřek, uzávěr, hranici.

a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Q}$ c) $\{\frac{1}{n} :\ n \in \mathbb{N}\}$ d) $\{(-1)^n :\ n \in \mathbb{N}\}$ e) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0,\ y \leq 0\}$
f) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 < 1\}$ g) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \geq 1\}$ h) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + e^y > 17\}$
i) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ |x+y| > x + y\}$ j) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ |x-y| = x - y\}$ k) $\{[x,y] \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 + 2xy = 5\}$
l) $\{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ x \geq 0, y > 0, x + y = 2, z \leq 0\}$

II. PARCIÁLNÍ DERIVACE

1. Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují

a) $x^m y^n$ b) e^{xy} c) $xy+yz+zx$ d) $|x|\cdot|y|$ e) $|y+\cos x|$ f) $|\sin y-\sin x|$ g) $|\cos y-\sin x|$ h) $\left(\frac{x}{y}\right)^z$

i) $x^{\frac{y}{z}}$ j) $\sin(x^y)$ k) $f(x,y)=\begin{cases} e^{\frac{-\pi}{x^2+3xy+3y^2}} & (x,y)\neq 0, \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ l) $\sqrt{x+y^2}$

2. Určete a nakreslete definiční obor funkce f, vyšetřete parciální derivace funkcí a napište rovnici funkce jejímž grafem je tečná rovina ke grafu funkce f v bodě B
(příklady ze zkouškových písemek z minulých let)

a) $\sqrt{e^{xy}-e}; B=[1,1+\log 2, f(1,1+\log 2)]$ b) $\log\frac{1-|x|}{1-|y|}; B=[5,-5,f(5,-5)]$

c) $\sqrt{e^{x^2+y^2}-e^4}; B=[3,0,f(3,0)]$ d) $\sqrt{x^2-y^2}; B=[-1,0,f(-1,0)]$ e) $\arcsin\frac{y^2+7}{x+5}; B=[9,0,f(9,0)]$

f) $\log\frac{x^2+y+1}{1-\sqrt{x}}; B=[4,-18,f(4,-18)]$

3. Pomocí věty o derivaci složené funkce spočtěte parciální derivace funkce F

a) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dána předpisem $f(x,y)=x^2+y^2$; $\varphi_1,\varphi_2:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dány předpisy $\varphi_1(r,s,t)=2r+s$, $\varphi_2(r,s,t)=t$; $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dána předpisem $F(r,s,t)=f(\varphi_1(r,s,t),\varphi_2(r,s,t))$

b) $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dána předpisem $f(x,y,z)=x+y^2+2z$; $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dány předpisy $\varphi_1(s,t)=3st$, $\varphi_2(s,t)=s^2+2t$, $\varphi_3(s,t)=t$; $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ dána předpisem $F(s,t)=f(\varphi_1(s,t),\varphi_2(s,t),\varphi_3(s,t))$

III. IMPLICITNÍ FUNKCE

1. Je dán vztah $x^2 + 2xy^2 + y^4 - y^5 = 0$ a bod $[0, 1]$. Dokažte, že:

i) tímto vztahem je definována hladká funkce $y = f(x)$ v jistém okolí bodu 0, pro kterou platí $f(0) = 1$;

ii) spočtěte $f'(0)$;

iii) spočtěte $f''(0)$;

iv) napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě 0;

v) zjistěte, zda je f na okolí bodu 0 konkávní/konvexní.

2. Ukažte, že daná rovnice určuje v jisté okolí bodu $M = [m_1, m_2]$ implicitně zadanou funkci $y = f(x)$. Spočtěte $f'(m_1)$ a $f''(m_1)$ a napište rovnici tečny ke grafu funkce f v bodě m_1.
(příklady ze zkouškových písemek z minulých let)

a) $\operatorname{arctg} \frac{x+2y}{3} + \operatorname{arctg} \frac{2x+y}{3} = \frac{\pi}{2}$, $M = [1, 1]$ b) $x^y + y^x = 3$, $M = [1, 2]$
c) $\cos(y + xe^x) + \sin(y - xe^x) = -1$, $M = [0, \pi]$ d) $e^{(x^2+y-2)} + e^{(y^2-x)} = 2$, $M = [1, 1]$
e) $e^{(\frac{x}{y}-1)} + e^{(x-y^2)} = 2$, $M = [1, 1]$ f) $4 \operatorname{arctg}(x - y^2) + \log(3y - x) = \pi$, $M = [5, 2]$

3. Je dán vztah $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ a bod $[1, -2, 1]$.

i) Dokažte, že tímto vztahem je definována hladká funkce $z = z(x, y)$ v jistém okolí U bodu $[1, -2]$, pro kterou platí $z(1, -2) = 1$;

ii) určete $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ v okolí U;

iii) napište rovnici tečné roviny ke grafu funkce $z = z(x, y)$ v bodě $[1, -2]$.

4. Ukažte, že daná rovnice určuje v jisté okolí bodu $M = [m_1, m_2, m_3]$ implicitně zadanou funkci $x = f(y, z)$. Spočtěte tečnou rovinu ke grafu f v bodě $[m_1, m_2, m_3]$.
(příklady ze zkouškových písemek z minulých let)

a) $x + \sin(x + y + \log(y + 2x)) = e^{2z}$, $M = [1, -1, 0]$ b) $\operatorname{tg}(yx + x^2 z) = \log(y^2 z + e^x)$, $M = [1, \pi/4, 0]$

5. Ukažte, že soustava rovnic určuje v jisté okolí bodu $M = [m_1, m_2, m_3]$ implicitně zadané funkce $x = f(y)$, $z = g(y)$. Spočtěte první a druhé derivace těchto funkcí v bodě m_2.
(příklady na motivy zkouškových písemek z minulých let)

a)
$$ze^{x+y} = xe^{x-z}$$
$$xyze^{y+z} = -1$$
$M = [1, -1, 1]$

b)
$$x + \cos(xz) + \sin(zy) = 2$$
$$z + \operatorname{arctg}(xz) = \log(xy)$$
$M = [1, 1, 0]$

c)
$$e^{2(y-z)} + \sin(x + z) = 2 + 2xy$$
$$x + z + \operatorname{arctg}(x + y) = \log(y^2 z^2)$$
$M = [-1, 1, 1]$

IV. EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

1. Zjistěte sup **a** inf **funkce** f **na množině** M **a vyšetřete, zda těchto hodnot funce** f **na** M **nabývá (bez Lagrangeových multiplikátorů).**

a) $f(x,y) = x - 2y - 3$; $M = \{[x,y]; 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, x + y \le 1\}$
b) $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (x-y)^2 + z$; $M = \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle \times \langle -1, 1\rangle$
c) $f(x,y,z) = x^2 + 4x + 5 - 3y^2 - 3y$; $M = \mathbb{R}^2$ d) $f(x,y,z) = 3x + 5 - 2x^2 - y^2$; $M = \mathbb{R}^2$
e) $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$; $M = \{[x,y]; |x| + |y| \le 1\}$ f) $f(x,y) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}, a > 0, b > 0$; $M = \{[x,y]; x^2 + y^2 \le 1\}$
g) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$; $M = \mathbb{R}^2$ h) $f(x,y) = (x^2 + 5y^2)e^{-(3x^2+y^2)}$; $M = \mathbb{R}^2$
i) $f(x,y) = x^2 + y^2$; $M = \{[x,y]; x^2 + 4y^2 = 1\}$ j) $f(x,y) = (x+y)e^{-(2x+3y)}$; $M = \{[x,y]; x > 0, y > 0\}$
k) $f(x,y) = xy$; $M = \{[x,y]; x + y = 5\}$ l) $f(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - z^2$; $M = \{[x,y,z]; x^2 + y^2 + z^2 \le 100\}$

2. Zjistěte sup **a** inf **funkce** f **na množině** M **a vyšetřete, zda těchto hodnot funce** f **na** M **nabývá (s Lagrangeovými multiplikátory).**

a) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$; $M = \{[x,y,z], x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$
b) $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$; $M = \{[x,y,z], x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y + z = 0\}$
c) $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z$, $M = \{[x,y,z]; x + y + z = \frac{\pi}{2}, x > 0, y > 0, z > 0\}$
d) $f(x,y,z) = xy^2z^3$, $M = \{[x,y,z]; x + 2y + 3z = a, x > 0, y > 0\}$, kde $a > 0$
e) $f(x,y) = x + y$, $M = \{[x,y,z], x^3 + y^3 - 2xy = 0, x \ge 0, y \ge 0\}$
f) $f(x,y,z) = 10z + x - y$, $M = \{[x,y,z], x^2 + y^2 + z^2 \le 1, y + x \ge 0\}$

3. Zjistěte sup **a** inf **funkce** f **na množině** M **a vyšetřete, zda těchto hodnot funce** f **na** M **nabývá (ze zkouškových písemek).**

a) $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 1, 2x + y + 2z \le 0\}$
b) $f(x,y,z) = xy + z$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 4, x^2 + y^2 + 1 \le z^2\}$
c) $f(x,y,z) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + \frac{1}{2}z^2$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 \le 4, x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$
d) $f(x,y,z) = x(y+z)$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + 2z^2 = 4, x + y + z \ge 1\}$
e) $f(x,y,z) = x^2 - y^2$, $M = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ x^2 + y^2 + z^2 = 9, x + z \ge 1\}$

V. MATICE

1. Určete hodnost matic (v závislosti na parametru):

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 & 5 \\ 6 & 15 & 12 & 25 & 42 \\ 2 & 5 & 4 & 8 & 14 \\ 1 & -1 & 2 & -4 & -7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & a \\ 1 & 1 & a & a^2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2(a-1) & (3a+1) & a \\ (1-a) & -2 & -1 \\ a & 2a & a \end{pmatrix}$

ze zkouškových písemek: d) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 7 \\ 19 & 17 & 13 & 11 \\ x & 5 & 3 & 2 \\ 11 & 13 & 17 & y \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & x & x+1 \\ y & y+1 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

2. Spočtete (je-li to možné) součin matic AB a BA, kde:

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

3. Nalezněte inverzní matice k následujícím maticím (v závislosti na parametru):

a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ze zkouškových písemek: d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 14 \\ 10 & 2 & 4 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 7 & 4 & 4 & 7x \end{pmatrix}$

4. Spočtěte determinanty (v závislosti na parametru):

a) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -9 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

ze zkouškových písemek: d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & x \\ 2 & 1 & 0 & 2 & x \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Pro která $x \in \mathbb{R}$ je $\det A = \det(A^{-1})$?

5. Najděte řešení soustav lineárních rovnic:

a) $\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & - & z & = 1 \\ 2x & + & 3y & & & = 1 \\ & - & y & + & z & = 1 \end{array}$ b) $\begin{array}{rcl} 2x+3y-w & = & 1 \\ 3x+2y+4z-2w & = & 0 \\ x-y+4z-w & = & 2 \end{array}$ c) $\begin{array}{rl} 4x+3y+6z & = 1 \\ 3x+5y+4z & = 10 \\ x-2y+2z & = -9 \end{array}$

ze zkouškových písemek: d) $\begin{array}{rl} x+5y+w & = 1 \\ 2x+6y+z+w & = 3 \\ 3x+7y+2z+w & = 5 \\ 4x+8y+2z+w & = 6 \end{array}$

6. Najděte všechna řešení soustavy $\mathbb{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pro uvedenou matici $\mathbb{A}$ a uvedené tři vektory pravých stran $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ a $\mathbf{b}_3$ (ze zkouškové písemky):

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 8 & 13 & 21 \\ 1 & 5 & 1 & 8 \\ 2 & 13 & 3 & 21 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Určere parametry $p \in \mathbb{R}$ pro které je determinant matice následující soustavy nulový a pro tyto parametry soustavu vyřešte (ze zkouškové písemky):

$$\begin{array}{rl} 2x+y+5z+3w & = 1 \\ 3x-y+pw & = 2 \\ -2x+y+z+2w & = 0 \\ 3x-y+pz+2w & = 4 \end{array}$$

VI. ŘADY

1. Určete, zda konvergují následující řady:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^5}{2^k}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^k}{k!}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k^2+3k+4}{2k^3}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{k+1}-\sqrt{k-1})$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^8}{3^k+5^k}$

f) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(k^2+3k)\frac{4^k+3^k}{5^k+2^k}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2k^2+3k+4}{2k^4+3}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{k^2+1}-\sqrt{k^2-1})$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{k^2+1}-\sqrt[3]{k^2-1})$

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[9]{k^{10}}+\sqrt[10]{k^9}}{\sqrt[9]{k^{11}}+\sqrt[11]{k^9}}$ k) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2\sqrt[k]{k}}$ l) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}\sin(\frac{1}{k})$ m) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(1+A^k), A>0$

n) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\cos\frac{1}{k}\right)$ o) $\sum_{n=1}^{\infty} k^x e^{(\sqrt{k^2+11}-\sqrt{k^2+8})},\ x\in\mathbb{R}$

2. Vyšetřete konvergenci (absolutní i neabsolutní) následujících řad:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}\log n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos(n^2)(\sqrt{n^6+n}-n^3)$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n+1}\cos(\frac{1}{n})$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+1}\cos(\frac{1}{n})$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\log n}}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n}{n^2}\cos\left(\frac{\sin n+8}{n^8}\right)$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\log n}\cos\left(\frac{n}{n^2+1}\right)$

3. Vyšetřete konvergenci a absolutní konvergenci následujících řad (ze zkouškových písemek):

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^k}{3^k k-k^2},\ x\in\mathbb{R}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k(\sqrt{k+2}-\sqrt{k})\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{k}+k^x},\ x\in\mathbb{R}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{1}{k}\right)^{(k^2)}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^k \log\left(1+\frac{x^k}{k-\sqrt{k}+1}\right),\ x>0$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(\sqrt{k^2+2k+15}-k)$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^x}{1+k\log\frac{k^2+2}{k^2+1}-\cos\frac{1}{k}},\ x\in\mathbb{R}$