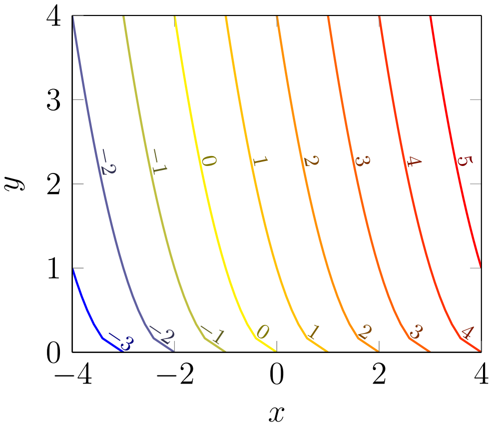
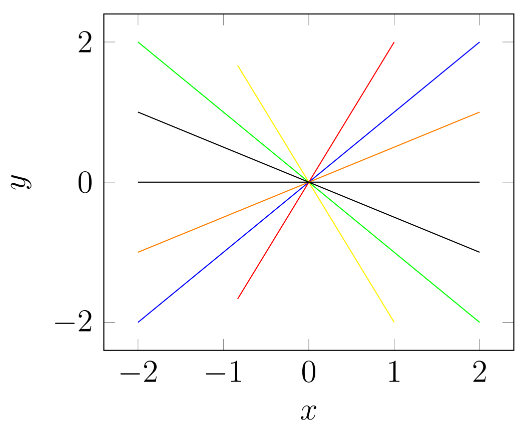
VÝSLEDKY

I. VRSTEVNICE FUNKCE, OTEVŘENÉ A UZAVŘENÉ MNOŽINY

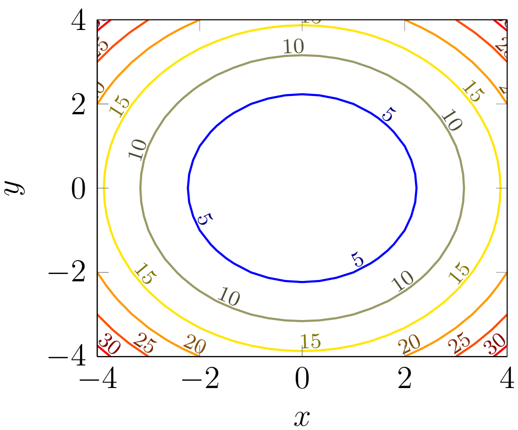
1. a) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ y \geq 0\}$



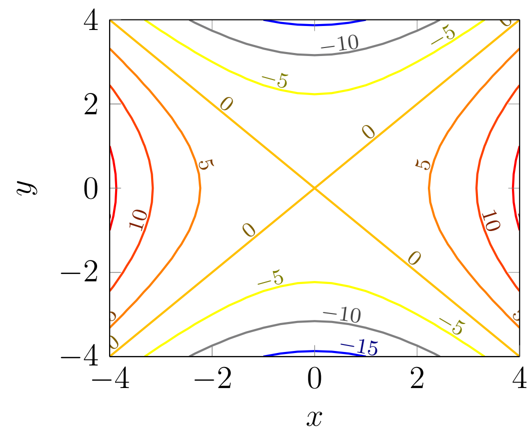
b) $D_f = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : \ x \neq 0\}$



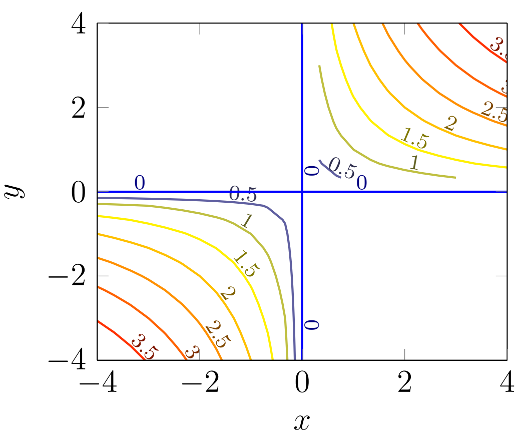
c) $D_f = \mathbb{R}^2$



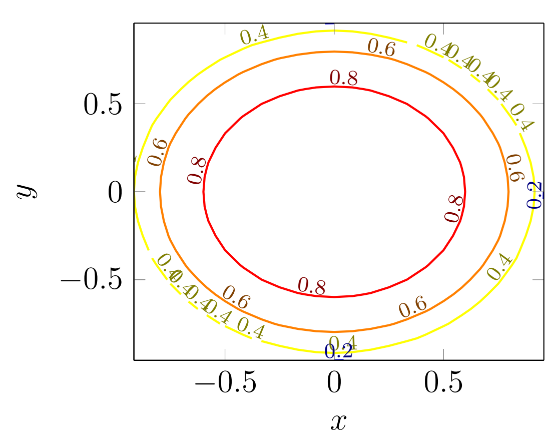
d) $D_f = \mathbb{R}^2$



e) $D_f = \{[x,y] : \ (x \geq 0 \ \& \ y \geq 0) \vee (x \leq 0 \ \& \ y \leq 0)\}$



f) $D_f = \{[x,y] : \ x^2 + y^2 \leq 1\}$



g) $D_f = \{[x,y]:\ x^2+y^2>1\}$, vrstevnice jsou kružnice. h) $D_f = \{[x,y]:\ 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$, vrstevnice jsou dvojice kružnic, v jednom případě kružnice. i) $D_f = \{[x,y]:\ -x^2-1 \le y \le -x^2+1\}$, vrstevnice jsou dvojice parabol, v jednom případě parabola. j) $D_f = \{[x,y]: 2k\pi \le x^2+y^2 \le (2k+1)\pi$ pro nějaké $k = 0,1,2,\dots\}$, vrstevnice jsou posloupnosti kružnic. k) $D_f = \mathbb{R}^2$, jsou tři vrstevnice - čtverce $\bigcup_{k,l\in\mathbb{N}}(2k\pi,(2k+1)\pi)\times(2l\pi,(2l+1)\pi)$, sjednocení jejich hranic a zbytek. l) $D_f = \mathbb{R}^2$, vrstevnice jsou grafy funkcí $y = k-|x|$.

2. a)-v), b)-i), c)-vi), d)-ii), e)-iii), f)-iv)

3. a) $\mathbb{N}$ je uzavřená, $\operatorname{Int}\mathbb{N} = \emptyset$, $H(\mathbb{N}) = \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ b) $\operatorname{Int}\mathbb{Q} = \emptyset$, $H(\mathbb{Q}) = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ není otevřená ani uzavřená. c) Množina není uzavřená ani otevřená, vnitřek je prázdný, hranice i uzávěr jsou $\{\frac{1}{n}:\ n\in\mathbb{N}\}\cup\{0\}$. d) Množina je uzavřená, není otevřená, vnitřek je prázdný, hranice a uzávěr jsou $\{-1,1\}$. e) Množina není uzavřená ani otevřená. Vnitřek je $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x>0,\ y<0\}$, uzávěr $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x\ge 0,\ y\le 0\}$, hranice$\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x\ge 0\ \&\ y\le 0\ \&\ (x=0 \vee y=0)\}$. f) Otevřená, uzávěr $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\}$, hranice $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=1\}$. g) Uzavřená, vnitřek $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2>1\}$, hranice $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2=1\}$. h) Otevřená, hranice $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x^2+e^y=17\}$, uzávěr $\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\ x^2+e^y\ge 17\}$ i) Otevřená, uzávěr $\{[x,y]:\ x+y\le 0\}$, hranice $\{[x,y]:\ x+y=0\}$. j) Uzavřená, vnitřek $\{[x,y]:\ x>y\}$, hranice $\{[x,y]:\ x=y\}$. k) Uzavřená, prázdný vnitřek. l) Ani uzavřená ani otevřená, vnitřek prázdný, hranice i uzávěr $\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3:\ x\ge 0, y\ge 0, x+y=2, z\le 0\}$.

II. PARCIÁLNÍ DERIVACE

1. a) $\frac{\partial f}{\partial x} = mx^{m-1}y^n$, $\frac{\partial f}{\partial y} = nx^m y^{n-1}$ pro $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. b) $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$ pro $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. c) $\frac{\partial f}{\partial x} = y+z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x+y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x+y$ pro $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. d) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = |y|\operatorname{sgn} x$ pro $x\neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = |x|\operatorname{sgn} y$ pro $y\neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y\neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x\neq 0$ neexistují. e) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\operatorname{sgn}(y+\cos x)\cdot\sin x$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \operatorname{sgn}(y+\cos x)$, pokud $y\neq -\cos x$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,-\cos x)$ neexistuje pro $x\in\mathbb{R}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(k\pi,(-1)^{k+1}) = 0$ pro $k\in\mathbb{Z}$. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,-\cos x)$ neexistuje pro $x\neq k\pi$. f) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos x\operatorname{sgn}(\sin x-\sin y)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\cos y\operatorname{sgn}(\sin x-\sin y)$, pokud $\sin x\neq\sin y$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+l\pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+l\pi) = 0$. V ostatních bodech parciální derivace neexistují. g) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\cos x\operatorname{sgn}(\cos y-\sin x)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\sin y\operatorname{sgn}(\cos y-\sin x)$, pokud $\sin x\neq\cos x$. $\frac{\partial f}{\partial x}(\frac{\pi}{2}+k\pi,(k+2l)\pi) = \frac{\partial f}{\partial y}(\frac{\pi}{2}+k\pi+2l\pi,k\pi) = 0$. V ostatních bodech parciální derivace neexistují. h) Pokud $x,y>0$ nebo $x,y<0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{y}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{zx}{y^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^{z}\cdot\log\frac{x}{y}$. i) Pokud $x>0$ a $z\neq 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z}\cdot x^{\frac{y}{z}-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}}\cdot\log x\cdot\frac{1}{z}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = -x^{\frac{y}{z}}\cdot\log x\cdot\frac{y}{z^2}$. j) Pokud $x>0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x^y)\cdot x^{y-1}\cdot y$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x^y)\cdot x^y\cdot\log x$. k) $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-\frac{\pi}{x^2+3xy+3y^2}}\cdot\frac{\pi(2x+3y)}{(x^2+3xy+3y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = e^{-\frac{\pi}{x^2+3xy+3y^2}}\cdot\frac{\pi(3x+6y)}{(x^2+3xy+3y^2)^2}$ pro $(x,y)\neq(0,0)$; v bodě $(0,0)$ jsou obě parciální derivace nulové. l) Pokud $x>-y^2$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x+y^2}}$. Jinak parciální derivace nemají smysl.

2. viz. výsledky zkouškových písemek zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`

3. a) $\frac{\partial F}{\partial r} = 8r+4s$, $\frac{\partial F}{\partial s} = 4r+2s$, $\frac{\partial F}{\partial t} = 2t$ b) $\frac{\partial F}{\partial s} = 4s^3+8st+3t$, $\frac{\partial F}{\partial t} = 4s^2+3s+8t+2$

III. IMPLICITNÍ FUNKCE

1. $f'(0) = 2$, $f''(0) = -14$, rovnice tečny je $y = -4x$, funkce je na okolí bodu 0 konkávní

2. viz. výsledky zkouškových písemek zde: `http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis`

3. tečná rovina je $z = \frac{7}{5}(y+2) + 1$

4. a) $1 - \frac{1}{2}(y+1) + \frac{1}{2}z$ b) $1 - \frac{4}{\pi - 2e}(y - \frac{\pi}{4}) + \frac{\frac{\pi^2}{8e} - 4}{\pi - 2e} z$

5. a) $f'(-1) = 1/2$, $g'(-1) = -1/4$ b) $f'(1) = -1/3$, $g'(1) = 1/3$ c) $f'(1) = \frac{5}{3}$, $g'(1) = \frac{7}{3}$

IV. EXTRÉMY FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

1. a) max -2 v bodě $[1, 0]$, min -5 v bodě $[0, 1]$ b) max 5 v bodech $[\pm 1, \pm 1, 1]$, min -1 v bodě $[0, 0, -1]$ c) sup neexistuje, inf neexistuje d) max 5 v bodě $[\frac{3}{4}, 0]$ e) max 1 v bodech $[\pm 1, 0]$, $[0, \pm 1]$, min 0 v bodě $[0, 0]$ f) max $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $[\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$, min $-\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}$ v bodě $[-\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, -\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}]$ g) max $\frac{1}{e}$ v bodech kružnice $x^2 + y^2 = 1$, min 0 v bodě $[0, 0]$ h) max $\frac{5}{e}$ v bodech $[0, \pm 1]$, min 0 v bodě $[0, 0]$ i) max 1 v bodech $[\pm 1, 0]$, min $\frac{1}{4}$ v bodech $[0, \pm \frac{1}{2}]$ j) sup $\frac{1}{2e}$, nenabývá se, inf 0, nenabývá se k) max $\frac{25}{4}$ v bodě $[\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$, inf neexistuje l) max 300 v bodech $[0, \pm 10, 0]$, min -100 v bodech $[0, 0, \pm 10]$

2. a) max 3 v $[\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$, min -3 v $[-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}]$ b) max $\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $[\frac{2}{\sqrt{78}}, -\frac{7}{\sqrt{78}}, \frac{5}{\sqrt{78}}]$, min $-\sqrt{\frac{26}{3}}$ v $[-\frac{2}{\sqrt{78}}, \frac{7}{\sqrt{78}}, -\frac{5}{\sqrt{78}}]$ c) max $\frac{1}{8}$ v $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}]$, inf 0, nenabývá se d) max $\frac{a^6}{6^6}$ v $[\frac{a}{6}, \frac{a}{6}, \frac{a}{6}]$, inf $-\infty$ e) max 2 v $[1, 1]$, min 0 v $[0, 0]$ f) max $\sqrt{102}$ v $[\frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{10}{\sqrt{102}}]$; min $-\sqrt{102}$ v $[-\frac{1}{\sqrt{102}}, \frac{1}{\sqrt{102}}, -\frac{10}{\sqrt{102}}]$

3. a) max $7 + 2\sqrt{6}$ v $[-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}]$; min $7 - \frac{10}{\sqrt{45}}$ v $[-\frac{5}{\sqrt{45}}, \frac{2}{\sqrt{45}}, \frac{4}{\sqrt{45}}]$ b) max v bodech $[\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{\frac{5}{2}}]$ a $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{\frac{5}{2}}]$; min v bodech $[\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{\frac{5}{2}}]$ a $[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{\frac{5}{2}}]$ c) max v bodech $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}, \pm\sqrt{\frac{3}{2}}]$; min v bodech $[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \pm\frac{\sqrt{11}}{3}]$ d) max $\sqrt{6}$ v bodě $[\sqrt{2}, \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}]$; min $-\frac{3}{25}(16+\sqrt{6})$ v bodě $[\frac{2-3\sqrt{6}}{5}, \frac{2+2\sqrt{6}}{5}, \frac{1+\sqrt{6}}{5}]$ e) max 9 v bodě $[3, 0, 0]$; min $-\frac{25}{3}$ v bodech $[\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}\sqrt{19}, \frac{2}{3}]$

V. MATICE

1. a) 3 b) 3 pro $a \neq 1$, 1 pro $a = 1$ c) 3 pro $a \neq 0, -1, 2$, jinak 2 d) 3 pokud $x = 6$ nebo $y = \frac{497}{23}$, jinak 4 e) 2 pokud $(x, y) = (11, 13)$, jinak 3

2. a) $AB = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 1 & 7 \\ 9 & 3 & -3 & -3 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, BA není definována b) $AB = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$, $BA = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 7 \\ -1 & 6 & -1 \end{pmatrix}$

3. a) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 & x & -1 \\ -3 & 1 & x+2 & -1 \\ \frac{13}{2} & -\frac{11}{4} & -3x-2 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}$

4. a) -36 b) 1 c) 1 d) $2x - 14$, $\det A = \det(A^1)$ pro $x \in \{\frac{15}{2}, \frac{13}{2}\}$

5. a) $x = 5$, $y = -3$, $z = -2$ b) nemá řešení c) Řešením jsou vektory $(\frac{-25-18t}{11}, \frac{37+2t}{11}, t)$, $t \in \mathbb{R}$ d) Řešením jsou vektory $(1 + t/4, -t/4, 1, t)$, $t \in \mathbb{R}$

6. Pro $\mathbf{b}_1 : (6, -28, -16, 19)$; pro $\mathbf{b}_2 : (-14, -160, -75, 111)$; pro $\mathbf{b}_3 : (3, 10, 4, -7)$

7. Determinant je nula pro $p \in \{0, -\frac{7}{4}\}$. Pro $p = -\frac{7}{4}$ soustava nemá řešení, pro $p = 0$ jsou řešením soustavy vektory $(-t, -2 - 3t, t, 1)$, $t \in \mathbb{R}$.

VI. ŘADY

1. a) K b) K c) D d) D e) K f) K g) K h) D i) K j) D k) K l) D m) K pro $A \in (0, 1)$, jinak D n) K o) K pro $x < -1$, jinak D

2. a) K, ale ne absolutně b) AK c) D d) K, ale ne absolutně e) D f) AK g) K, ale ne absolutně

3. a) AK pro $|x| < 3$, K neabsolutně pro $x = -3$ a jinak D b) AK pro $x > 1/2$, jinak K neabsolutně c) D (není splněna nutná podmínka konvergence) d) AK pro $x \in (0, 1)$, K neabsolutně pro $x = 1$, jinak D e) D f) AK pro $x < -2$, jinak D