

I. OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY

1. Řešte následující nerovnosti a rovnosti v \mathbb{R} :

- a) $\frac{x-2}{2x-8} \geq 1$; b) $\frac{x+2}{x+3} > \frac{2x+3}{x+6}$; c) $\log_{\frac{1}{8}}(x^2 - 3x + 3) \geq 0$; d) $\log(x^2 + 1) = 2 \log(3 - x)$;
e) $\sin 2x < \cos x$; f) $x \leq \left| \frac{x+2}{x-3} \right|$; g) $|x - |x + 1|| \leq 2x$;
h) $|x - |x - 1|| = 1 - |x|$; i) $\frac{x^2+2}{x+7} < 2(x - 7)$; j) $\log_7(49x^2) = 4 \cdot (\log_7 x)^2$.

2. Načrtněte graf funkce

- a) $f(x) = 1 - \left| \cos \frac{x}{2} \right|$; b) $g(x) = \frac{1}{2} + \cos\left(\frac{\pi}{2} + |x|\right)$; c) $h(x) = |||x| - 1| - 1| - 1|$;
d) $i(x) = \left| \frac{x+4}{x+3} \right|$; e) $j(x) = |\log |2 - x||$.

3. V závislosti na parametru $c \in \mathbb{R}$ určete, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí:

- a) $2x^2 + 4x + c > 0$ b) $\log |x| + c \in (-\pi/2, \pi/2)$

II. VÝROKY, SUPREMA, INFIMA

1. Rozhodněte o správnosti následujících výroků a napište jejich negace.

- a) $\forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} (z > x \Rightarrow y < z)$; b) $\exists y \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} (z > x \Rightarrow y < z)$;
c) $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} (z > x \Rightarrow y < z)$; d) $\exists x \in \mathbb{N} \forall y \in \mathbb{N} \forall z \in \mathbb{N} (z < x \Rightarrow y > z)$;
e) $\forall x \in \mathbb{R} \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall y \in \mathbb{R} (|y - x| < \delta \Rightarrow y < x + \frac{\varepsilon}{3})$.

2. Najděte suprema a infima následujících množin (pokud existují). Existují maxima a minima?

- a) $A = \{-\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}\}$; b) $B = \{\frac{n+(-1)^n}{n}; n \in \mathbb{N}\}$;
c) $C_1 = \{n^2 - m^2; n, m \in \mathbb{N}\}$, $C_2 = \{n^2 - m^2; n, m \in \mathbb{N}, n > m\}$, $C_3 = \{n^2 - m^2; n, m \in \mathbb{N}, n \leq m\}$;
d) $D_1 = \{2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{N}\}$, $D_2 = \{2^{-n} + 3^{-n}; n \in \mathbb{Z}\}$;
e) $E = \{n^{(-1)^n}; n \in \mathbb{N}\}$; f) $F = \{5^{(-1)^j 3^k}; j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}\}$;

III. LIMITY POSLOUPNOSTÍ

1. Spočtěte následující limity posloupností: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 6n}{n^3 - 7n + 7}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^5 + 3n - 2}{n^5 - 3n^3 + 1}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+11} - \sqrt[3]{n})$

f) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{100} - (n+3)^{100}}{(n+2)^{100} - n^{100}}$ h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + (n+1)^2}{(n+3)^2 + (n+4)^2}$

i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+4)^{27} - (n+1)^{27}}{(2n^2+5)^{13} - (n^2-1)^{13}}$ j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2-1)(n+2)^3 - n^2}{3n(n^2+5)(n^2+1)}$ k) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n})$

l) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n-1})$ m) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt[3]{n^3+1})$ n) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n+2} - \sqrt[4]{n+1}}{\sqrt[3]{n+3} - \sqrt[3]{n}}$

o) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1} - n - 1}{\sqrt{n}}$ p) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}}{n+1}}$

2. Spočtěte následující limity posloupností: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 2^n + 17^n}{n! + n + 3^n}$ b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + [\sqrt[3]{n}]^3}{n - [\sqrt{n+9}]}$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n + n^5 + n!}{n(n^6 + n!)}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n + n^8 - 4n!}{5n! - 3^n + n^9}$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n + 4^n + 3^n + 2^n}$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$

g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n + \sqrt{n^2 + \sqrt{n^4 + 1}}}{n+1}}$ h) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\sqrt{3^n + 2 \cdot 2^n} - \sqrt{3^n + 2^n}}$ i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{2^n + 3^n}}{\sqrt[n]{4^n + \sqrt{n}}}$

3. Spočtěte následující limity posloupností (příklady ze zkuškových písemek na FSV):

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n^{10} + n^3)^7 - (n^7 + 1)^{10}) \cdot \left(\sqrt[3]{\left(1 + \frac{1}{n^9}\right)^7} - 1 \right)^7$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + \frac{2}{n})^{30} - (n + \frac{1}{n})^{30}}{\sqrt{(2+n^7)^8 - 2^8}}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n\sqrt{n} \sqrt[n]{(n+1)^n + n^{n+1}}}{[\sqrt{n}] + [2\sqrt{n}] + \dots + [n\sqrt{n}]}$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(25 + \frac{1}{n}\right)^6 - \left(5 + \frac{1}{n}\right)^{12} \right) \cdot \sqrt[6]{(n+2)^7 - (n-1)^7}$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n^5 + 2)^{25} - (n+5)^{125}) \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{25n^4}\right)^{125} - 1 \right)^{31}$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 17\sqrt[6]{n}} - \sqrt{n^5 - 5\sqrt[6]{n} + 1}}{\sqrt[3]{n^5 + 18n - 16} - \sqrt[3]{n^5 - 9n}}$

V. LIMITA FUNKCÍ

1. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (příklady na podíly polynomů):

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$ d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$ e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 2x + 1}$
 f) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - x - 2)^{20}}{(x^3 - 12x + 16)^{10}}$ g) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x(x-2)^2} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2} \right)$ h) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x^2 - 5x + 4} + \frac{x-4}{3(x^2 - 3x + 2)} \right)$

2. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (příklady na výrazy s odmocninami):

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x^n}, n \in \mathbb{Z}$ b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2+7} - \sqrt[3]{x^3+7}}{(x-1)^n}, n \in \mathbb{Z}$ c) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2}$
 d) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{1+x}}{x^2 - 9}$

3. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (příklady na použití známých limit $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$, $\frac{\log x}{x-1} \rightarrow 1$, $\frac{e^x-1}{x} \rightarrow 1$, $\frac{1-\cos x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2}$ a VOLSF):

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$ (tuto limitu dále lze považovat za „známou“)
 d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - \cos x}{x^2}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^3 x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$ g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$
 h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x} - \sqrt{1+\sin x}}{x^3}$ i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos x}}{x^2}$

4. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{2x+1} \right)^{x^2}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2}$ c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x^2 - x + 1)}{\log(x^{10} + x + 1)}$ d) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(x - \frac{\pi}{4})^2}$
 e) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\cotg^2 x}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$ g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})}{\log(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}$ h) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$
 i) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{(x - \frac{\pi}{4})^3}$ j) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x \cdot 2^x}{1+x \cdot 3^x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \log(1+2^x) \cdot \log\left(1+\frac{3}{x}\right)$ l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\sin x)}$
 m) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arccos x}{(1-x)^\alpha}$ n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arccos \frac{1-x^2}{1+x^2}}{\sin x}$ o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x)^x - \sqrt{1+\sin^3 x}}{x^3}$

5. Spočtěte limitu, nebo ukažte že limita neexistuje (jedná se o příklady ze zkouškových písemek)

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(1+\cos x)^x + 1}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+x^3+3^x+x^x)}{\log(1+x^3+3^x)\log(1+x^3)}$ c) $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x \cdot \log(\sin^2 x)}{\sqrt{1+\sin x}}$
 d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n + n^{n+1} + \dots + n^{2n}} \left(1 - \cos \frac{3}{n}\right)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\cos x} \cdot \log(\cos x) - \sqrt{1+\log(\cos x)}}{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - \sqrt[3]{\sin x}} \cdot \frac{\sqrt[3]{x}}{\sin^2 x}$
 f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3 + \sin n} - \sqrt{n^3 + 3n}}{\sqrt[4]{n^2 + n} - \sqrt[4]{n^2 + \arctg n}}$ g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \left(\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{cotg} x}{2} \right)^{\operatorname{tg}^2 2x}$

VI. SPOJITOSTI A DERIVACE

1. Vyšetřete spojitost a najděte derivaci funkce $f(x) =$

a) $(x^2 + 51x + 119)^{87}$ b) $(x + 15)^3(x - 17)^{10}x^9$ c) $\frac{e^{x^2+1} \cdot \cos x}{(x+1)^2 \cdot \log(x^2+1)}$ d) $\log(x^2 + x + 1)$

e) $\sin(\cos((x^3 + 17x^2 - 56x + 1)^{18}))$ f) $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ g) $(\sin x)^{\cos x}$ h) $\log \arccos x$

i) $x \arcsin \sqrt{\frac{x}{x+1}} + \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}$ j) $\operatorname{arctg} e^x - \log \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$

Ze zkouškových písemek: k) $\max\{5x - 4, x^2\}$ l) $[x] \cdot \sqrt[3]{x^2 - 9}$ m) $|\cos 2x| \cdot (\operatorname{tg} x - 1)$

VII. PRŮBĚH FUNKCE

1. Vyšetřete průběh funkce $f(x) =$

a) $\frac{x^3}{\sqrt{|x^4-1|}}$ b) $|(1-x^2)e^{-x}|$

Ze zkouškových písemek:

c) $(3^{x+2|x|} - 9)^2$ d) $\operatorname{arctg} \frac{x^2}{x^2-6}$ e) $(x + \log 2) \cdot 2^{-\frac{5}{x}}$