VÝSLEDKY

I. OPAKOVÁNÍ STŘEDOŠKOLSKÉ LÁTKY

1. a) $(4;6]$ b) $(-6;-3)\cup(\frac{-1-\sqrt{13}}{2},\frac{-1+\sqrt{13}}{2})$ c) $[1;2]$ d) $\frac{4}{3}$
e) $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left((-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{6}+2k\pi)\cup(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{5\pi}{6}+2k\pi)\right)$
f) $(-\infty,3)\cup(3,2+\sqrt{6}]$ g) $[\frac{1}{2},\infty)$
h) $\{0,\frac{2}{3}\}$ i) $(-10;-7)\cup(10;\infty)$ j) $\{7,\frac{\sqrt{7}}{7}\}$

3. a) $c\le 2 \implies x\in(-\infty,\frac{-2-\sqrt{4-2c}}{2})\cup(\frac{-2+\sqrt{4-2c}}{2},\infty)$; $c>2\implies x\in\mathbb{R}$
b) $x\in(-e^{\pi/2-c},e^{-\pi/2-c})\cup(e^{-\pi/2-c},e^{\pi/2-c})$

II. VÝROKY, SUPREMA, INFIMA

1. a) Platí, negace $\exists x\in\mathbb{N}\ \forall y\in\mathbb{N}\ \exists z\in\mathbb{N}\,(z>x\ \&\ y\ge z)$;
b) Platí, negace $\forall y\in\mathbb{N}\ \exists x\in\mathbb{N}\ \exists z\in\mathbb{N}\ (z>x\ \&\ y\ge< z)$;
c) Neplatí, negace $\forall x\in\mathbb{N}\ \exists y\in\mathbb{N}\ \exists z\in\mathbb{N}\,(z>x\ \&\ y\ge z)$;
d) Platí, negace $\forall x\in\mathbb{N}\ \exists y\in\mathbb{N}\ \exists z\in\mathbb{N}\,(z<x\ \&\ y\le z)$;
e) Platí, negace $\exists x\in\mathbb{R}\ \exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists y\in\mathbb{R}\,(|y-x|<\delta\ \&\ y\ge x+\frac{\varepsilon}{3})$.

2. a) $\sup A=0,\min A=-1$; b) $\max B=\frac{3}{2},\min B=0$; c) C_1 nemá supremum ani infimum (není zdola, ani shora omezená), C_2 není shora omezená, $\min C_2=3$, $\max C_3=0$, C_3 není zdola omezená; d) $\max D_1=\frac{5}{6}$, $\inf D_1=0$, D_2 není shora omezená, $\inf D_2=0$; e) E není shora omezená, $\inf E=0$; f) F není shora omezená, $\inf F=0$.

III. LIMITY POSLOUPNOSTÍ

1. a) 0 b) 2 c) 2 d) 0 e) 0 f) Nemá limitu g) 1/2 h) 1 i) $\frac{81}{2^{13}-1}$ j) 1/3 k) 1/2 l) 0 m) 1/2 n) 0 o) 0 p) 1 q) 0
2. a) 0 b) 2 c) 0 d) $-\frac{4}{5}$ e) 5 f) $\frac{1}{3}$ g) $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ h) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ i) $\frac{3}{2}$
3. a) $-\frac{7^7}{3^6}$ b) 30 c) 2 d) $-54\cdot 5^{10}\cdot\sqrt[6]{21}$ e) -5^{35} f) $\frac{11}{9}$

V. LIMITA FUNKCÍ

1. a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{2}{3}$ d) neexistuje e) $+\infty$ f) $\frac{3^{10}}{2^{10}}$ g) ∞ h) 0
2. a) 0 pro $n<1$, 1 pro $n=1$, pro $n>1$ sudé limita neexistuje a pro $n>1$ liché je limita ∞ b) 0 pro $n<1$, $-\frac{1}{12}$ pro $n=1$, pro $n>1$ sudé limita neexistuje a pro $n>1$ liché je limita $-\infty$ c) $\frac{12}{5}$ d) $-\frac{1}{16}$
3. a) 2 b) $-\frac{1}{2}$ c) 1 d) $\frac{3}{2}$ e) neexistuje f) $\frac{1}{2}$ g) $-\frac{1}{12}$ h) $\frac{1}{4}$ i) $\frac{4}{3}$
4. a) 0 b) e^3 c) $\frac{1}{5}$ d) neexistuje e) e f) 1 g) $\frac{3}{2}$ h) e^{-1} i) ∞ j) $\frac{2}{3}$ k) $3\log 2$ l) 1 m) 0 pro $\alpha<\frac{1}{2}$, $\sqrt{2}$ pro $\alpha=\frac{1}{2}$, ∞ pro $\alpha>\frac{1}{2}$ n) 2 o) -1
5. a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{1}{3\log 3}$ c) limita neexistuje (zprava $\sqrt{2}$, zleva $-\sqrt{2}$) d) $\frac{9}{2}$ e) $\frac{3}{4}$ f) -6 g) $\sqrt{e}$

VI. SPOJITOSTI A DERIVACE

1. a) f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x)=87(x^2+51x+119)^{86}\cdot(2x+51)$.
b) f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x)=3(x+15)^2(x-17)^{10}x^9+10(x+15)^3(x-17)^9x^9+9(x+15)^3(x-17)^{10}x^8$.
c) f je definována a spojitá na $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)$; $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}f(x)=+\infty$, nelze spojitě rozšířit. Pro $x\in D_f$ máme

$$f'(x)=\frac{\left((2x+1)e^{x^2+1}\cdot\cos x-e^{x^2+1}\cdot\sin x\right)\cdot(x+1)\cdot\log(x^2+1)-e^{x^2+1}\cdot\cos x\cdot\left(2\cdot\log(x^2+1)+\frac{2x(x+1)}{x^2+1}\right)}{(x+1)^3\cdot\log^2(x^2+1)}.$$

d) f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x)=\frac{2x+1}{x^2+x+1}$

e) f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$,

$$f'(x) = -18\cos\left(\cos\left((x^3+17x^2-56x+1)^{18}\right)\right)\cdot\sin\left((x^3+17x^2-56x+1)^{18}\right)\cdot(x^3+17x^2-56x+1)^{17}\cdot(3x^2+34x-56)$$

.

f) f je definována a spojitá na $(0,\infty)$, $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = +\infty$, nelze spojitě rozšířit. $f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}+2}\cdot(\log x - 1)$ pro $x > 0$.

g) f je definována a spojitá na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi,(2k+1)\pi)$. $\lim\limits_{x\to 2k\pi+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to(2k+1)\pi-} f(x) = +\infty$, lze tedy spojitě rozšířit na $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\langle 2k\pi,(2k+1)\pi)$. $f'(x) = (\sin x)^{\cos x}\cdot(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x\log\sin x)$ pro $x\in\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi,(2k+1)\pi)$. Po dodefinování je $f'_+(2k\pi) = 1$.

h) f je definována a spojitá na $\langle -1,1)$, $\lim\limits_{x\to 1-} f(x) = -\infty$. $f'(x) = -\frac{1}{\arccos x\cdot\sqrt{1-x^2}}$ pro $x\in(-1,1)$, $f'_+(-1) = -\infty$.

i) f je definována a spojitá na $\langle 0,+\infty)$. $f'(x) = \arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}$ pro $x>0$, $f'_+(0) = 0$.

j) f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x-1}{e^{2x}+1}$ pro $x\in\mathbb{R}$.

k) f je definována a spojitá na $\mathbb{R}$, $f'(x) = 5$ pro $x\in(1,4)$; $f'(x) = 2x$ pro $x\in(-\infty,1)\cup(4,\infty)$; $f'_+(1) = f'_-(4) = 5$, $f'_-(1) = 2$, $f'_+(4) = 8$.

l) $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá v každém bodě $\mathbb{R}\setminus(\mathbb{Z}\setminus\{3,3\})$, v bodech $\mathbb{Z}\setminus\{3,3\}$ je spojitá zprava a nespojitá zleva. $f'(x) = \frac{2}{3}x[x](x^2-9)^{-2/3}$ pro $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$; $f'(-3) = f'(3) = \infty$; pro $k\in\mathbb{Z}\setminus\{-3,3\}$ je $f'_+(k) = \frac{2}{3}k^2(k^2-9)^{-2/3}$ a $f'_-(k) = \begin{cases}\infty, & |k|>3,\\ -\infty, & |k|<3.\end{cases}$

m) $D_f = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$, f je spojitá v každém bodě D_f. $f'(x) = -2\sin 2x\cdot(\operatorname{tg} x - 1)\cdot\operatorname{sgn}(\cos 2x) + |\cos 2x|\frac{1}{\cos^2 x}$ pro $x\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(-\frac{\pi}{2}+k\pi,-\frac{\pi}{4}+k\pi)\cup(-\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{4}+k\pi)\cup(\frac{\pi}{4}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi)$; $f'(\frac{\pi}{4}+k\pi) = 0$, $f'_+(-\frac{\pi}{4}+k\pi) = -4$, $f'_-(-\frac{\pi}{4}+k\pi) = 4$ pro $k\in\mathbb{Z}$.

VII. PRŮBĚH FUNKCE

1. a) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, f je spojitá v každém bodě D_f a je lichá, stačí tedy vyšetřovat na $\langle 0,+\infty)$, tj. na $\langle 0,1)\cup(1,+\infty)$. $f(0)=0$, limita v 1 je $+\infty$, v $+\infty$ je $+\infty$. Pro $x\in\langle 0,1)\cup(1,+\infty)$ je $f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x^4-1)x^2(x^4-3)}{\sqrt{|x^4-1|^3}}$, f je rostoucí na $\langle 0,1)$, klesající na $(1,\sqrt[4]{3}\rangle$, rostoucí na $\langle\sqrt[4]{3},+\infty)$, v $\sqrt[4]{3}$ je lokální minimum, $H_f = \mathbb{R}$. Pro $x\in\langle 0,1)\cup(1,+\infty)$ je $f''(x) = \frac{6x(x^4+1)}{\sqrt{|x^4-1|^5}}$, f je konvexní na $(0,1)$ a na $(1,+\infty)$ (z lichosti konkávní na $(-\infty,-1)$ a na $(-1,0)$). V bodě 0 má inflexní bod. Asymptota v $+\infty$ i v $-\infty$ je $y=x$.

b) $D_f = \mathbb{R}$, f je spojitá v každém bodě D_f, limita v $-\infty$ je $+\infty$, v $+\infty$ je 0. Pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ je $f'(x) = \operatorname{sgn}(1-x^2)e^{-x}(x^2-2x-1)$, $f'_-(-1) = -2e$, $f'_+(-1) = 2e$, $f'_-(1) = -2e^{-1}$, $f'_+(1) = 2e^{-1}$, f je klesající na $(-\infty,-1\rangle$, rostoucí na $\langle -1,1-\sqrt{2}\rangle$, klesající na $\langle 1-\sqrt{2},1\rangle$, rostoucí na $\langle 1,1+\sqrt{2}\rangle$, klesající na $\langle 1+\sqrt{2},+\infty)$, v bodech -1 a 1 má minimum, v bodech $1-\sqrt{2}$ a $1+\sqrt{2}$ lokální maximum, $H_f = [0,\infty)$. Pro $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ je $f''(x) = \operatorname{sgn}(1-x^2)e^{-x}(x^2-4x+1)$, f je konvexní na $(-\infty,-1\rangle$, konkávní na $\langle -1,2-\sqrt{3}\rangle$, konvexní na $\langle 2-\sqrt{3},1\rangle$, konkávní na $\langle 1,2+\sqrt{3}\rangle$, konvexní na $\langle 2+\sqrt{3},+\infty)$. V bodech $2-\sqrt{3}$ a $2+\sqrt{3}$ má inflexní body. Asymptotu v $-\infty$ nemá, v $+\infty$ má asymptotu $y=0$.

c) , d) , e) : viz. výsledky zkouškové písemky z roku 2008/2009, varianty E, D, B
`http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/pis-fsv/0809/pis.htm`