

# I. TAYLORŮV POLYNOM

1. Najděte Taylorův polynom  $k$ -tého řádu v bodě 0 pro funkce:

- a)  $\operatorname{tg}(x)$ ,  $k = 3$    b)  $\sin(\sin x)$ ,  $k = 5$    c)  $\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ ,  $k = 4$    d)  $\cos(\sin x)$ ,  $k = 5$    e)  $\sin(1 - \cos x)$ ,  $k = 3$   
 f)  $e^{2x-x^2}$ ,  $k = 5$    g)  $\frac{x}{e^x-1}$ ,  $k = 4$    h)  $\log(\cos x)$ ,  $k = 6$

2. Odhadněte absolutní chybu aproximace  $\sin x \approx x - \frac{x^3}{6}$  na intervalu  $[-1/2, 1/2]$ .

3. Spočtěte  $\sqrt{5}$  s přesností  $10^{-2}$

4. Spočtěte limity

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$    b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( n^2 - \cot^2 \left( \frac{1}{n} \right) \right)$    c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin(\sin x) - \sin(2x) \sqrt[3]{1+x^2}}{x^5}$    d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$   
 e)  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^4 \left( \cos\left(\frac{1}{n}\right) - \exp\left(-\frac{1}{2n^2}\right) \right)$    f)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$    g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(e^{x^2}-1) - 1 + \cos(\sqrt{2}x)}{x^4}$   
 h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+\sin x)^x - \exp(x^2) + \frac{x^3}{2}}{x^4}$    i)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[6]{n^5} \left( \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{\sqrt[6]{n}} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt[3]{n}}\right) \right)$

Další příklady k procvičení lze nalézt například:

- v sekci I zde: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/MA/ma2-2015-16.pdf>
- na webu kolegyně Kuncové zde: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie28.php>

Příklady zkouškové obtížnosti lze nalézt ve zkouškových písemkách z Matematiky III, které jsou vystaveny zde: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis>

## —————VÝSLEDKY—————

1. a)  $x + \frac{1}{3}x^3$    b)  $x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{10}x^5$    c)  $1 + 2x + 2x^2 - 2x^4$    d)  $1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{24}x^4$    e)  $\frac{x^2}{2}$    f)  $1 + 2x + x^2 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{5}{6}x^4 - \frac{1}{15}x^5$   
 g)  $1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{720}x^4$    h)  $-\frac{x^2}{2} - \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{45}x^6$   
 2.  $\frac{1}{3840}$   
 3.  $2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} + \frac{1}{29} - \frac{5}{2^{14}} = 2.23602294922$   
 4. a)  $\frac{1}{120}$    b)  $\frac{2}{3}$    c)  $\frac{3}{5}$    d)  $\frac{1}{24}$    e)  $-\frac{1}{12}$    f)  $\frac{1}{3}$    g)  $\frac{2}{3}$    h)  $\frac{1}{6}$

## II. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE, ÚVOD

**Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence**

**1. Příklady na integrování "přímo":**

a)  $\int x^9 + \frac{1}{x} - 5e^x + x^{-3} - \cos x \, dx$     b)  $\int 2e^{3x} - \sqrt[5]{5-x} \, dx$     c)  $\int \frac{x^2+3x+6}{x^4} \, dx$     d)  $\int x(1-x)^{10} \, dx$

**2. Příklady na integrování "per partes":**

a)  $\int x^3 \sin x \, dx$     b)  $\int e^x \cos x \, dx$     c)  $\int x^n e^x \, dx, n \in \mathbb{N}$     d)  $\int x \log x \, dx$     e)  $\int x e^x \cos x \, dx$

**3. Příklady na integrování pomocí substitute:**

a)  $\int \cotg x \, dx$     b)  $\int \frac{x^2}{\cos^2 x^3} \, dx$     c)  $\int \frac{x}{1+x^4} \, dx$     d)  $\int \frac{1}{x \log x} \, dx$     e)  $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+5}} \, dx$     f)  $\int \frac{1}{x \log x \log(\log x)} \, dx$

**4. Další příklady k procvičení:**

a)  $\int (1 - \frac{1}{x^2}) \sqrt{x} \sqrt{x} \, dx$     b)  $\int (2^x + 3^x)^2 \, dx$     c)  $\int \frac{1}{x^2} \sin(\frac{1}{x}) \, dx$     d)  $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3 x}} \, dx$     e)  $\int \frac{x^2}{(8x^3+27)^{2/3}} \, dx$   
 f)  $\int \frac{\arctg x}{1+x^2} \, dx$     g)  $\int \frac{2^{2x}}{9^x-4^x} \, dx$     h)  $\int \arctg x \, dx$     i)  $\int x^2 \sin(2x) \, dx$     j)  $\int \sqrt{x} \log^2 x \, dx$     k)  $\int x^2 e^{-2x} \, dx$   
 l)  $\int (\frac{\log x}{x})^2 \, dx$     m)  $\int x^5 e^{x^3} \, dx$     n)  $\int e^{\sqrt{x}} \, dx$     o)  $\int x \sin \sqrt{x} \, dx$     p)  $\int \cos^2 x \, dx$

Další příklady k procvičení primitivních funkcí lze nalézt například:

- na webu kolegyně Kuncové zde: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie28.php>
- ve skriptech Ilja Černý: Inteligentní kalkulus. Online zde: <http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html>

Příklady zkouškové obtížnosti lze nalézt ve zkouškových písemkách z Matematiky III, které jsou vystaveny zde: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis>

—————VÝSLEDKY—————

1. a)  $\frac{x^{10}}{10} + \log|x| - 5e^x - \frac{1}{2x^2} - \sin x$  na  $(-\infty, 0)$  a  $(0, \infty)$     b)  $\frac{2}{3}e^{3x} + \frac{5(5-x)^{\frac{6}{5}}}{6}, x \in \mathbb{R}$   
 c)  $-\frac{1}{x} - \frac{3}{2x^2} - \frac{2}{x^3}$  na  $(-\infty, 0)$  a  $(0, \infty)$     d)  $-\frac{(1-x)^{11}}{11} + \frac{(1-x)^{12}}{12}$   
 2. a)  $-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x, x \in \mathbb{R}$     b)  $\frac{1}{2}(e^x \sin x + e^x \cos x), x \in \mathbb{R}$     c)  $I_n := \int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n I_{n-1}; I_1 := x e^x - e^x, x \in \mathbb{R}$   
 d)  $\frac{1}{4}(2x^2 \log x - x^2), x \in (0, \infty)$     e)  $\frac{1}{2}e^x(x \sin x + x \cos x - \sin x), x \in \mathbb{R}$   
 3. a)  $\log|\sin x|$  na každém z intervalů  $(k\pi, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z}$   
 b)  $\frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3$  na každém z intervalů  $(\sqrt[3]{-\frac{\pi}{2} + k\pi}, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2} + k\pi}), k \in \mathbb{Z}$     c)  $\frac{1}{2} \arctg x^2, x \in \mathbb{R}$   
 d)  $\log|\log x|$  na  $(0, 1)$  a  $(1, \infty)$     e)  $\sqrt{x^2+5}, x \in \mathbb{R}$     f)  $\log|\log(\log x)|$  na  $(1, e)$  a  $(e, \infty)$   
 4. a)  $\frac{4(x^2+7)}{7\sqrt[4]{x}}, D_f = (0, \infty)$     b)  $\frac{4^x}{\log 4} + 2\frac{6^x}{\log 6} + \frac{9^x}{\log 9}, D_f = \mathbb{R}$     c)  $\cos(\frac{1}{x}), D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
 d)  $\frac{2}{\sqrt{\cos x}}, D_f = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi)$     e)  $\frac{1}{8}\sqrt[3]{8x^3+27}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{2}\}$   
 f)  $\frac{1}{2} \arctg^2 x, D_f = \mathbb{R}$     g)  $-\frac{1}{2 \log \frac{2}{3}} \log|1 - (\frac{2}{3})^{2x}|, D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$   
 h)  $x \arctg x - \frac{1}{2} \log(1+x^2), D_f = \mathbb{R}$     i)  $-\frac{2x^2-1}{4} \cos(2x) + \frac{x}{2} \sin(2x), D_f = \mathbb{R}$   
 j)  $\frac{2}{3}x^{3/2}(\log^2 x - \frac{4}{3} \log x + \frac{8}{9}), D_f = (0, \infty)$     k)  $-\frac{e^{-2x}}{2}(x^2 + x + \frac{1}{2}), D_f = \mathbb{R}$   
 l)  $-\frac{1}{x}(\log^2 x + 2 \log x + 2), D_f = (0, \infty)$     m)  $\frac{1}{3}(x^3 - 1)e^{x^3}, D_f = \mathbb{R}$     n)  $2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}, D_f = (0, \infty)$   
 o)  $2(6-x)\sqrt{x} \cos \sqrt{x} - 6(2-x) \sin \sqrt{x}, D_f = (0, \infty)$     p)  $\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}, D_f = \mathbb{R}$

## II. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE, POKRAČOVÁNÍ

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

**5. Příklady na integrování pomocí druhé věty o substituci:**

a)  $\int \frac{1}{(1-x^2)^{3/2}} dx$     b)  $\int \frac{1}{(x^2+a^2)^{3/2}} dx$  ( $a > 0$ )

**6. Příklady, kde se musí funkce "lepit":**

a)  $\int |2x+1| dx$     b)  $\int |\cos x| dx$     c)  $\int \max\{x, x^2\} dx$     d)  $\int \sqrt{x^6} dx$     e)  $\int \sin |2x-1| dx$     f)  $\int |\sin x + \cos x| dx$

g)  $\int e^{-|x|} dx$

**7. Integrace racionálních funkcí:**

a)  $\int \frac{5x^6-20x^5+20x^4+x^2-4x+11}{(x-2)^2} dx$     b)  $\int \frac{2x+1}{x^2+4x+5} dx$     c)  $\int \frac{2x+1}{x^2+4x-5} dx$     d)  $\int \frac{8x^3-5x^2-15x+24}{(x+1)^2(2x^2-6x+5)} dx$     e)  $\int \frac{3x+1}{(9x^2-12x+6)^2} dx$

f)  $\int \frac{1}{e^{2x}+e^x-2} dx$     g)  $\int \frac{1}{x} \frac{\log(2x)}{\log^2(x)+3} dx$

—————VÝSLEDKY—————

5. a)  $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ ,  $D_f = (-1, 1)$     b)  $\frac{1}{a^2} \sin(\operatorname{arctg} \frac{x}{a}) = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2+x^2}}$ ,  $D_f = \mathbb{R}$

6. a)  $F(x) = \begin{cases} -(x^2+x) & x < -\frac{1}{2} \\ x^2+x+\frac{1}{2} & x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$     b)  $F(x) = \begin{cases} \sin x + 4k & x \in [-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z} \\ -\sin x + 4k + 2 & x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, 3\frac{\pi}{2} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

c)  $F(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{3} & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{x^2}{2} & x \in [0, 1] \\ \frac{x^3}{3} + \frac{1}{6} & x \in (1, \infty) \end{cases}$     d)  $\frac{1}{4}|x|x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$     e)  $F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \cos(2x-1) & x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \cos(2x-1) - 1 & x < \frac{1}{2} \end{cases}$

f)  $F(x) = \begin{cases} \cos x - \sin x + 4k\sqrt{2} - 2\sqrt{2} & x \in [-\pi + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z} \\ \sin x - \cos x + 4k\sqrt{2} & x \in [-\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi], k \in \mathbb{Z} \\ \cos x - \sin x + 4k\sqrt{2} + 2\sqrt{2} & x \in [\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \pi + 2k\pi], k \in \mathbb{Z} \end{cases}$     g)  $F(x) = \begin{cases} e^x - 2 & x < 0 \\ -e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$

7. a)  $x^5 + x - \frac{7}{x-2}$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$     b)  $\log(x^2+4x+5) - 3 \operatorname{arctg}(x+2)$ ,  $D_f = \mathbb{R}$

c)  $\frac{3}{2} \log|x+5| + \frac{1}{2} \log|x-1|$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, -5\}$     d)  $3 \log|x+1| - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{2} \log(2x^2-6x+5) + 2 \operatorname{arctg}(2x-3)$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

e)  $-\frac{1}{6(9x^2-12x+6)} + \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg}(\frac{3x-2}{\sqrt{2}}) + \frac{3x-2}{4(9x^2-12x+6)} = \frac{\sqrt{2}}{8} \operatorname{arctg}(\frac{3x-2}{\sqrt{2}}) + \frac{9x-8}{12(9x^2-12x+6)}$ ,  $D_f = \mathbb{R}$

f)  $-\frac{x}{2} + \frac{1}{3} \log|e^x - 1| + \frac{1}{6} \log(e^x + 2)$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$     g)  $\frac{1}{2} \log(\log^2 x + 3) + \frac{\log 2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(\frac{\log x}{\sqrt{3}})$ ,  $D_f = (0, \infty)$

## II. HLEDÁNÍ PRIMITIVNÍ FUNKCE, POKRAČOVÁNÍ II

Vyjádřete primitivní funkce na maximálních intervalech existence

### 8. Goniometrické substituce:

a)  $\int \frac{\sin^3 x + \sin x}{\cos^3 x + \cos x} dx$    b)  $\int \frac{1}{(2 + \cos x) \sin x} dx$    c)  $\int \frac{1}{\cos^2 x (4 \sin^2 x - 1)} dx$    d)  $\int \frac{\cos x - 1}{\sin x - 1} dx$    e)  $\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx$    f)  $\int \frac{1}{5 + \cos x} dx$

### 9. Příklady s odmocninou:

a)  $\int \frac{1}{x} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx$    b)  $\int \frac{x}{\sqrt{-x^2 + 2x + 8}} dx$    c)  $\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx$    d)  $\int \sqrt{x^2 + 2x - 3} dx$

—————VÝSLEDKY—————

8. a)  $\frac{3}{2} \log(\cos^2 x + 1) - 2 \log |\cos x|$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$    b)  $\frac{1}{3} \log(\cos x + 2) - \frac{1}{2} \log(\cos x + 1) + \frac{1}{6} \log(1 - \cos x) = \frac{1}{6} \log \left( \frac{(1 - \cos x)(\cos x + 2)^2}{(1 + \cos x)^3} \right)$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{k\pi\}$    c)  $\frac{1}{3} \operatorname{tg} x + \frac{2}{3\sqrt{3}} \log \left| \frac{\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1}{\sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1} \right|$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi\}$    d) Pro každé  $k \in \mathbb{Z}$  je primitivní funkce na  $(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi + 2k\pi)$  dána předpisem  $F(x) = \begin{cases} -\log(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1) + 2 \log |\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1| - \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1} & x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi + 2k\pi) \setminus \{2k\pi + \pi\} \\ 0 & x = 2k\pi + \pi \end{cases}$

e)  $F(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + k\pi(1 - 1/\sqrt{2}) & x \in (-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi), \quad k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + k\pi(1 - 1/\sqrt{2}) & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

f)  $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} \right) \right) + k \frac{\pi}{\sqrt{6}} & \text{pro } x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi), k \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2\sqrt{6}} + k \frac{\pi}{\sqrt{6}} & \text{pro } x = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

9. a)  $\log(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} + 1) - \log \left| \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right| - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus (-1, 1]$

b)  $2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x+2}{4-x}} - \sqrt{-x^2 + 2x + 8}$ ,  $D_f = (-2, 4)$

c)  $-\frac{3}{2} \log \left| 2(x + \sqrt{x^2 + x + 1}) + 1 \right| + \frac{3}{4(x + \sqrt{x^2 + x + 1}) + 2} + 2 \log \left| x + \sqrt{x^2 + x + 1} \right|$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

d)  $\frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2 + 2x - 3} - 2 \log(x+1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3})$ ,  $D_f = \mathbb{R} \setminus (-3, -1)$ .

Jiné možnosti jak výsledek posledního příkladu zapsat jsou například:

- $-2 \log(x+1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) - \frac{2}{(x+1 + \sqrt{x^2 + 2x - 3})^2} + \frac{1}{4}(x + \sqrt{x^2 + 2x - 3}) + \frac{1}{8}(x + \sqrt{x^2 + 2x - 3})^2$

- $\operatorname{sgn}(x+3) \left( -2 \log |t+1| + 2 \log |t+1| + \frac{2}{t+1} + \frac{2}{t-1} - \frac{2}{(t+1)^2} + \frac{2}{(t-1)^2} \right)$ , kde  $t = \sqrt{\frac{x-1}{x+3}}$

### III. NEWTONŮV INTEGRÁL

Vypočtete následující integrály

1. a)  $\int_0^2 |1-x| dx$    b)  $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3x+2} dx$    c)  $\int_0^{100\pi} \sqrt{1-\cos 2x} dx$    d)  $\int_{\frac{1}{e}}^e |\log x| dx$    e)  $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x-1} dx$   
f)  $\int_0^{2\pi} x^2 \cos x dx$
2. a)  $\int_{-1}^\infty \frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}} dx$    b)  $\int_0^{5\pi} \frac{1}{\sin^2 x+2\cos^2 x} dx$    c)  $\int_1^3 \frac{1}{x\sqrt{-x^2+4x-3}} dx$    d)  $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\sin x} dx$   
e)  $\int_{-\infty}^\infty \frac{e^x}{e^{2x}+e^x+1} dx$    f)  $\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx$

Další příklady k procvičení lze nalézt například v sekci V zde:

<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/MA/ma2-2016-17.pdf>

a také v sekcích VII, IX zde:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/data/ma215-cv.pdf>

a také v kapitole 10 zde:

<http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html>

a také na webu kolegyně Kuncové zde:

<https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie28.php>

Příklady zkouškové obtížnosti lze nalézt ve zkouškových písemkách z Matematiky III, které jsou vystaveny zde:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis>

—————VÝSLEDKY—————

1. a) 1   b)  $\log 2$    c)  $200\sqrt{2}$    d)  $2 - \frac{2}{e}$    e)  $2 - \frac{\pi}{2}$    f)  $4\pi$
2. a)  $\pi$    b)  $5\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$    c)  $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$    d)  $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$    e)  $\frac{2}{3\sqrt{3}}\pi$    f)  $\frac{1}{6}(\log 2 - 1 + \pi/2)$

#### IV. KONVERGENCE NEWTONOVA INTEGRÁLU

##### 1. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů

a)  $\int_0^1 \frac{1}{e^{\sqrt{x}}-1} dx$    b)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^4}} dx$    c)  $\int_0^1 \frac{\log(1-\cos x)}{\sqrt[3]{x(x-1)}} dx$    d)  $\int_1^\infty \frac{e^x}{x^4} dx$    e)  $\int_8^\infty \frac{x+1}{(x+4)^3} \sin x dx$

##### 2. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů

a)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x(e^x-e^{-x})}} dx$    b)  $\int_0^1 (\log x)e^{-x^2} dx$    c)  $\int_0^\infty \frac{\arctan x}{x^2} dx$    d)  $\int_1^\infty \sin^2 \frac{1}{x} dx$    e)  $\int_0^1 \frac{1}{e^x-\cos x} dx$   
 f)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x \cos x}} dx$    g)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin x \sqrt{\cos x}}} dx$    h)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$    i)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} dx$    j)  $\int_0^1 x^{-10x} dx$    k)  $\int_0^1 \frac{\log(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}} dx$   
 l)  $\int_0^\infty \pi - 2 \arctan x dx$    m)  $\int_0^1 \frac{\arccos x}{\log^2(1/x)} dx$    n)  $\int_1^2 \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-\sqrt[3]{x}}} dx$

##### 3. Vyšetřete konvergenci následujících integrálů (příklady zkouškové obtížnosti)

a)  $\int_1^\infty \frac{\sqrt[4]{e^{1/x^2} - e^{-1/x^2}} \log(x+1)}{x+1} dx$    b)  $\int_0^1 \log(\operatorname{arctg} x) \frac{\pi/2 - \arcsin x}{(e^{1-x} - 1)^2} dx$    c)  $\int_0^5 \frac{\log(x^2 - 10x + 26)}{xe^{1/x}(5-x)^{5/2}} dx$   
 d)  $\int_1^\infty \frac{(1 - \cos \frac{1}{x})^{3/4}}{\sqrt{\sin \frac{1}{x}}} \operatorname{arctg} \left( 3 + \frac{\log x}{x} \right) dx$    e)  $\int_0^1 \frac{e^{2x^2} - e^{x^2}}{x^3 \sqrt{\sin x}} \log(2 + \operatorname{arctg} x) dx$

Další příklady k procvičení lze nalézt například:

- ve skriptech Ilja Černý: Inteligentní kalkulus (kapitola 10, vyšetřování absolutní konvergence integrálů z Příkladů 10.101-10.145). Online zde: <http://matematika.cuni.cz/ikalkulus.html>
- na webu kolegyně Kuncové zde: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie28.php>
- příklady ze zkouškových písemek Kalkulu 1 v semestru 2019-2020: [https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/Kalkulus/kalkulus1\\_zkPis\\_web.pdf](https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/Kalkulus/kalkulus1_zkPis_web.pdf)

—————VÝSLEDKY—————

1. a) K (konverguje)   b) K   c) K   d) D (diverguje)   e) K  
 2. a) K   b) K   c) D   d) K   e) D   f) D   g) K   h) D   i) K   j) K   k) K   l) D   m) D   n) K  
 3. a) K   b) D   c) K   d) D   e) D

V. RIEMANNŮV-STIELTJESŮV INTEGRÁL

1. Spočítejte hodnotu následujících Riemannových-Stieltjesových integrálů

a)  $\int_0^1 x^2 dx^3$    b)  $\int_0^1 x^2 de^x$    c)  $\int_1^e (x+4) d(e^x + \log x)$

d)  $\int_0^3 e^x dg(x)$ , kde  $g(x) := \begin{cases} 1 & \text{pokud } 0 \leq x < 1 \\ 3 & \text{pokud } 1 \leq x \leq 2 \\ -1 & \text{pokud } 2 < x \leq 3 \end{cases}$    e)  $\int_1^3 x^2 dg(x)$ , kde  $g(x) := \begin{cases} 1 & \text{pokud } x = 1 \\ 2 & \text{pokud } 1 < x < 2 \\ 3 & \text{pokud } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

f)  $\int_0^{100\pi} |\sin x| d \sin(x)$    g)  $\int_0^2 |x^2 - 1| d([x] + x)$  (kde  $[\cdot]$  značí dolní celou část)

h)  $\int_1^4 f(x) dg(x)$ , kde  $f(x) := \begin{cases} -1 & \text{pokud } x \in [1, 2) \\ 2 & \text{pokud } x \in [2, 3) \\ -2 & \text{pokud } x \in [3, 4] \end{cases}$    a)  $g(x) := \begin{cases} x+1 & \text{pokud } x \in [1, 2] \\ x^2 & \text{pokud } x \in (2, 3] \\ x^3 & \text{pokud } x \in (3, 4] \end{cases}$

i)  $\int_{-3}^0 ([x+2] - x) dg(x)$ , kde  $g(x) = |e^x - e^{-2}|$  (a  $[\cdot]$  značí dolní celou část)

—————VÝSLEDKY—————

1. a)  $\frac{3}{5}$    b)  $e - 2$    c)  $(e+3)e^e + 3 - 3e$    d)  $2e - 4e^2$    e) 5   f) 0   g) 5   h) -99   i)  $3e^{-3} - 5e^{-2} - e^{-1} + 2$

## VI. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

**Najděte všechna maximální řešení následujících diferenciálních rovnic**

1. a)  $y' = 3x^2y^2$    b)  $y' = \sqrt{y}e^{-x}$    c)  $yy' = \frac{1-2x}{y}$    d)  $xy' = -2 - y, y(1) = 1$    e)  $y' = xe^xy, y(1) = 1$   
 f)  $y' = x\sqrt[3]{1-y}, y(0) = 0$    g)  $y' = \sin x \sin y, y(0) = \frac{\pi}{2}$    h)  $y' = \sqrt{4-y^2} \cdot x, y(0) = 1$
2. a)  $xy' = -(x+y)$    b)  $xyy' = y^2 - x^2$
3. a)  $y' = \frac{y}{x} - 1$    b)  $xy' + y = \log x + 1$    c)  $y' + \frac{x+1}{x}y = 3xe^{-x}, y(1) = -\frac{1}{e}$
4. a)  $y' = \frac{y \log y}{\sin x}, y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{e}$    b)  $y' + y \cos x = \sin 2x, y(0) = 3$    c)  $xy' = y \log \frac{y}{x}, y(1) = e^3$
- d)  $y' = \frac{2x+y}{x} \log(\frac{2x+y}{x}) + \frac{y}{x}$    e)  $y' + |x|y = x^5, y(0) = 0$    f)  $y' = \frac{1}{y^3} \sqrt[3]{y^4 - 16} \cdot e^x, y(0) = -\sqrt[4]{16 + (\frac{4}{3})^3}$

Další příklady k procvičení lze nalézt například:

- v online sbírce Tomáše Bárty zde: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/>
- na webu kolegyně Kuncové zde: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie28.php>

Příklady zkouškové obtížnosti lze nalézt ve zkouškových písemkách z Matematiky IV, které jsou vystaveny zde:

<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/edu.php?edutype=archpis>

případně se dají použít příklady ze zkouškových písemek Kalkulu 1 v semestru 2019-2020: [https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/Kalkulus/kalkulus1\\_zkPis\\_web.pdf](https://www.karlin.mff.cuni.cz/~cuth/doc/MFF/Kalkulus/kalkulus1_zkPis_web.pdf)

### —————VÝSLEDKY—————

1. a) Stacionární řešení je  $y_s(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ . Pro každé  $c \in \mathbb{R}$  jsou maximálními řešeními funkce

$$y_c^1(x) = \frac{-1}{x^3+c}, x \in (-\infty, -\sqrt[3]{c}) \quad \text{a} \quad y_c^2(x) = \frac{-1}{x^3+c}, x \in (-\sqrt[3]{c}, \infty)$$

- b) Stacionární řešení je  $y_s(x) = 0, x \in \mathbb{R}$ . Pro každé  $c > 0$  je maximálním řešením funkce

$$y_c(x) = \begin{cases} 0 & x \in (\infty, -\log c] \\ \frac{1}{4}(c - e^{-x})^2 & x \in (-\log c, \infty) \end{cases}$$

- c) Stacionární řešení nejsou. Pro každé  $c \in \mathbb{R}$  je  $y_c(x) = \sqrt[3]{3(x-x^2+c)}$  maximální řešení definované na intervalech: pokud  $c < -\frac{1}{4}$  pak  $x \in \mathbb{R}$ ; pokud  $c = -\frac{1}{4}$  pak  $x \in (-\infty, \frac{1}{2})$  nebo  $x \in (\frac{1}{2}, \infty)$ ; pokud  $c > -\frac{1}{4}$  pak  $x \in (-\infty, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}+c})$  nebo  $x \in (\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}+c}, \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+c})$  nebo  $x \in (\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+c}, \infty)$ .

- d)  $y(x) = \frac{3}{x} - 2, x \in (0, \infty)$    e)  $y(x) = \exp((x-1)e^x), x \in \mathbb{R}$    f)  $y(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{(1 - \frac{x^2}{3})^3} & x \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), \\ 1 & x \in (-\infty, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, \infty). \end{cases}$

- g)  $y(x) = 2 \operatorname{arctg}(e^{1-\cos x}), x \in \mathbb{R}$    h)  $y(x) = \begin{cases} 2 \sin(\frac{x^2}{2} + \frac{\pi}{6}) & x \in (-\sqrt{\frac{2}{3}\pi}, \sqrt{\frac{2}{3}\pi}), \\ 2 & x \in (-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}\pi}] \cup [\sqrt{\frac{2}{3}\pi}, \infty). \end{cases}$

2. a) Pro každé  $K \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  jsou  $y(x) = -\frac{x}{2} + \frac{K}{x}, x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty)$  maximální řešení. Dalším řešením je  $y(x) = -\frac{x}{2}, x \in \mathbb{R}$

- b) Pro každé  $c \in \mathbb{R}$  jsou maximálními řešeními  $y(x) = \pm x\sqrt{2c - \log x^2}, x \in (-e^c, 0)$  nebo  $x \in (0, e^c)$



3. a)  $y(x) = -x \log|x| + cx$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  nebo  $x \in (0, \infty)$ ,  $c \in \mathbb{R}$     b)  $y(x) = \log x + \frac{c}{x}$ ,  $x \in (0, \infty)$ ,  $c \in \mathbb{R}$

c)  $y(x) = (x^2 - \frac{2}{x})e^{-x}$ ,  $x \in (0, \infty)$

4. a)  $y(x) = e^{-\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$ ,  $x \in (0, \pi)$     b)  $y(x) = 2(\sin x - 1) + 5e^{-\sin x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$     c)  $y(x) = xe^{1+2x}$ ,  $x \in (0, \infty)$

d)  $y(x) = -2x + x \exp(x \log 5)$ ,  $x \in (0, \infty)$     e)  $y(x) = \begin{cases} x^4 - 4x^2 + 8(1 - e^{-x^2/2}) & x \in [0, \infty), \\ -x^4 - 4x^2 + 8(e^{x^2/2} - 1) & x \in (-\infty, 0] \end{cases}$

f)  $y(x) = \begin{cases} -2 & x \in (-\infty, \log(1/3)], \\ -\sqrt[4]{16 + (\frac{8}{3}(e^x - \frac{1}{3}))^{3/2}} & x \in [\log(1/3), \infty) \end{cases}$

## VII. OBYČEJNÉ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU

**1. Uvažujte rovnici**  $y'' - y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ . a) Dokažte, že  $\{e^x, e^{-x}\}$  tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice na intervalu  $(-\infty, \infty)$  b) Nalezněte obecné řešení rovnice na intervalu  $(-\infty, \infty)$  c) Nalezněte řešení splňující počáteční podmínku  $y(0) = \frac{\pi}{2} + 3$ ,  $y(1) = (e + \frac{1}{e}) \arctg(e) + e + \frac{2}{e}$ .

**2. Uvažujte rovnici**  $y'' - \frac{4}{x}y' + \frac{6}{x^2}y = 3x$  s počáteční podmínkou  $y(1) = 3$ ,  $y'(1) = 10$ . a) Dokažte, že  $\{x^2, x^3\}$  tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice na intervalu  $(0, \infty)$  b) Nalezněte řešení rovnice.

**3. Uvažujte rovnici**  $y'' - \frac{2x+2}{x^2+2x}y' + \frac{2}{x^2+2x}y = x^2 + 2x$  s počáteční podmínkou  $y(-1) = 0$ ,  $y'(-1) = 4/3$ . a) Dokažte, že  $\{x^2, x + 1\}$  tvoří fundamentální systém řešení homogenní rovnice na intervalu  $(-2, 0)$  b) Nalezněte řešení rovnice.

**4. Nalezněte obecné řešení rovnic**

a)  $y'' + 6y' + 10y = 0$  b)  $y'' - 8y' + 7y = 0$  c)  $y'' - 6y' + 9y = 8e^x$  d)  $y'' - 2y' + 5y = \cos x$   
 e)  $y'' - 2y' + 10y = \frac{9e^x}{\cos 3x}$  f)  $y'' + 3y = \sin(\sqrt{3}x) + 3\cos(\sqrt{3}x)$

**5. Nalezněte maximální řešení diferenciálních rovnic s počáteční podmínkou**

a)  $y'' - 2y' = 8x + 4$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 4$  b)  $y'' + y' = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ ,  $y(0) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2$ ,  $y'(0) = 0$   
 c)  $y'' - 4y' + 4y = x^2 + 2e^{2x}$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 0$

Další příklady k procvičení lze nalézt například:

- v materiálech ke cvičení prof. Kalendy, viz. příklady ze sekce VI zde: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kalenda/archiv/s213141.pdf/>
- na webu kolegyně Kuncové zde: <https://www.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/historie28.php>
- v online sbírce Tomáše Bárty zde: <http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcODR/>

### —————VÝSLEDKY—————

1. a) b)  $y(x) = (e^x + e^{-x}) \arctg e^x + c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  c)  $y(x) = (e^x + e^{-x}) \arctg e^x + e^x + 2e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$
2.  $y(x) = 3x^3 \log x + 2x^2 + x^3$ ,  $x \in (0, \infty)$
3.  $y(x) = \frac{1}{6}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ ,  $x \in (-2, 0)$
4. a)  $y(x) = c_1 e^{-3x} \sin x + c_2 e^{-3x} \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  b)  $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{7x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$
- c)  $y(x) = 2e^x + c_1 e^{3x} + c_2 x e^{3x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  d)  $y(x) = \frac{1}{5} \cos x - \frac{1}{10} \sin x + c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \sin 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$
- e)  $y(x) = 3x e^x \sin 3x + \log |\cos 3x| e^x \cos 3x + c_1 e^x \sin 3x + c_2 e^x \cos 3x$ ,  $x \in (\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3})$ ,  $k \in \mathbb{Z}$
- f)  $y(x) = x(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin(\sqrt{3}x) - \frac{1}{6}\sqrt{3} \cos(\sqrt{3}x)) + c_1 \sin(\sqrt{3}x) + c_2 \cos(\sqrt{3}x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$
5. a)  $y(x) = -3 + 4e^{2x} - 2x^2 - 4x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  b)  $y(x) = \arctg(e^x) - \frac{1}{2} \log(1 + e^{2x})e^{-x} - \frac{\log 2}{2} + \frac{\log 2}{2}e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$
- c)  $y(x) = x^2 e^{2x} + \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{3}{8} - \frac{3}{8}e^{2x} + \frac{1}{4}x e^{2x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$