STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE II. – ŘADY A DERIVACE

Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou (popř. lokálně stejnoměrnou) konvergenci řad funkcí. Rozhodněte o spojitosti řady.

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n e^{-nx}$, $x \geq 0$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\left(nx+\frac{1}{nx}\right)}$

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$

6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+n^2}$

7. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(1+\frac{x^2}{n\log^2 n}\right)$

8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1+\frac{2x}{x^2+n^2}\right)$, $x \geq 0$

9. (Exponenciála) Ukažte, že funkce $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ je dobře definovaná a řeší diferenciální rovnici $y' = y$ na $\mathbb{R}$ s počáteční podmínkou $y(0) = 1$.

10. Pro $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\sqrt{n}}$ dokažte existenci a spočtěte $f'(0)$.

Vyšetřete stejnoměrnou konvergenci řad.

11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ na $(0,\pi)$

12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$ na $(-1,\infty)$

13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n(1+x^n)}$ na $(0,1)$

14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(1-x)x^n$ na $[0,1]$

15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(x)\sin(nx)}{\sqrt{n+x}}$ na $(0,\infty)$

16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{arctg} x^n}{\sqrt{n+1}}$ na $[0,\infty)$

Vyšetřete diferencovatelnost následujících funkcí.

17. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+x}$, $x \in (-1,\infty)$

18. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|}{n^2+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$

19. Položme $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$, $x \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^2((0,2\pi))$

20. Dokažte, že tzv. zeta funkce $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, $x \in (1,\infty)$ je třídy $\mathcal{C}^\infty$.

VÝSLEDKY

Symbolem „$\sum$“ zde máme na mysli řadu ze zadání.

1. $\sum \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$

2. $\sum \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $(-1,1)$, $\sum \not\rightrightarrows$ na $(-1,1)$, jinde diverguje

3. $\sum \rightrightarrows$ na $[0,\infty)$

4. $\sum \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $(0,\infty)$, $\sum \not\rightrightarrows$ na $(0,\infty)$, diverguje na $(-\infty,0)$.

5. $\sum \rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$

6. $\sum \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$, $\sum \not\rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$

7. $\sum \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $\mathbb{R}$, $\sum \not\rightrightarrows$ na $\mathbb{R}$

8. $\sum \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $[0,\infty)$, $\sum \not\rightrightarrows$ na $[0,\infty)$

9. Je to tak.

10. $f'(0) = \cos 1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$

11. $\sum \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows}$ na $(0,\pi)$, $\sum \not\rightrightarrows$ na $(0,\pi)$

12. $\sum \rightrightarrows$ na $(-1,\infty)$

13. $\sum \rightrightarrows$ na $(0,1)$

14. $\sum \rightrightarrows$ na $[0,1]$

15. $\sum \rightrightarrows$ na $(0,\infty)$

16. $\sum \rightrightarrows$ na $[0,\infty)$

17. $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$

18. $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $f'(0)$ neexistuje (jednostranné derivace v 0 existují)