

STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE I. – POSLOUPNOSTI

Vyšetřete bodovou a stejnoměrnou (případně lokálně stejnoměrnou) konvergenci posloupnosti funkcí $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

1. $f_n(x) = x^n - x^{n+1}$, $x \in [0, 1]$
2. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in [0, 1]$
3. $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n + x}$, $x \in [0, 1]$
4. $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2 x^2}$, $x \in [0, \infty)$
5. $f_n(x) = \arctan nx$, $x \in [0, \infty)$
6. $f_n(x) = \frac{1}{x + n}$, $x \in [0, \infty)$
7. $f_n(x) = \frac{x^n}{1 + x^n}$, $x \in [0, \infty)$
8. $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$, $x \in [0, \infty)$
9. $f_n(x) = n \left(\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right)$, $x \in [0, \infty)$
10. $f_n(x) = \sqrt{x} n^{-\sqrt{x}} \log n$, $x \in [0, \infty)$
11. $f_n(x) = \sqrt[n]{x^n + 3^n}$, $x \in [0, \infty)$
12. $f_n(x) = (x + 1)^3 \operatorname{arccotg}(-nx^3)$, $x \in \mathbb{R}$
13. $f_n(x) = \sqrt{n^2 + 1} \cdot \left(e^{\frac{1}{nx}} - 1 \right)$, $x \in (0, \infty)$

VÝSLEDKY

1. $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0, 1]$
2. $f_n \rightarrow 0$ na $[0, 1]$, $f_n \not\rightarrow 0$ na $[0, 1]$, $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0, 1]$ ^{loc}
3. $f_n \rightrightarrows x$ na $[0, 1]$
4. $f_n \rightarrow 0$ na $[0, \infty)$, $f_n \not\rightarrow 0$ na $[0, \infty)$, $f_n \rightrightarrows 0$ na $(0, \infty)$ ^{loc}
5. $f_n \rightarrow f$ na $[0, \infty)$, $f_n \not\rightarrow f$ na $[0, \infty)$, $f_n \rightrightarrows f$ na $(0, \infty)$, kde ^{loc}

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \pi/2, & x \in (0, \infty) \end{cases}$$
6. $f_n \rightrightarrows 0$ na $[0, \infty)$
7. $f_n \rightarrow f$ na $[0, \infty)$, $f_n \not\rightarrow f$ na $[0, \infty)$, $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, 1)$ a na $(1, \infty)$, ^{loc}
kde $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1) \\ 1/2, & x = 1 \\ 1, & x \in (1, \infty) \end{cases}$
8. $f_n \rightrightarrows \frac{\pi}{2}x$ na $[0, \infty)$
9. $f_n \rightrightarrows \frac{1}{2\sqrt{x}}$ na $(0, \infty)$, $f_n \not\rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}$ na $(0, \infty)$ ^{loc}
10. $f_n \rightarrow 0$ na $[0, \infty)$, $f_n \not\rightarrow 0$ na $[0, \infty)$, $f_n \rightrightarrows 0$ na $(0, \infty)$ ^{loc}
11. $f_n \rightrightarrows f$ na $[0, \infty)$, kde $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in [0, 3] \\ x, & x \in (3, \infty) \end{cases}$
12. $f_n \rightarrow f$ na \mathbb{R} , $f_n \not\rightarrow f$ na \mathbb{R} , $f_n \rightrightarrows f$ na $(-\infty, 0)$ a na $(0, \infty)$, kde ^{loc}

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^3\pi, & x > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$
13. $f_n \rightrightarrows \frac{1}{x}$ na $(0, \infty)$, $f_n \not\rightarrow \frac{1}{x}$ na $(0, \infty)$ ^{loc}