Metrické prostory II.

(X,ρ) je <u>separabilní</u>, pokud $\exists D\subset X$, D spočetná hustá (tzn. $\overline{D}=X$)

<u>Tvrzení</u> pro $M\subset X$ platí: M je hustá $\iff \forall x\in X\ \forall \varepsilon>0\ \exists y\in M: \rho(x,y)<\varepsilon$.

$\boxed{1}$ (a) $\mathbb{R}^n$ je separabilní.

<u>Dk.</u> $D=\mathbb{Q}^n$. Vezmeme $x\in\mathbb{R}^n$. Vezmeme $y_i\in\mathbb{Q}$, $i=1,\dots,n$, aby $|x_i-y_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$.

Pak $\|x-y\|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}<\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)^2}=\sqrt{n\frac{\varepsilon^2}{n}}=\varepsilon$.

(b) $C([0,1])$ se supremovou normou je separabilní:

<u>Důkaz</u> Víme <u>Weierstrass:</u> $\forall f\in C([0,1])\ \forall\varepsilon>0\ \exists p\in C([0,1])$ polynom : $\|f-p\|_\infty<\varepsilon$.

Položme $D=\{q\in C([0,1]): q(x)=q_nx^n+\dots+q_1x+q_0,\ x\in[0,1],\ q_i\in\mathbb{Q},\ i=1,\dots,n,\ n\in\mathbb{N}\}$.

Chceme dokázat $\overline{D}=C([0,1])$. Vezmeme tedy $f\in C([0,1])$, $\varepsilon>0$.

Podle Weierstrasse nalezneme $p\in C([0,1])$ polynom, t.ž. $\|f-p\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}$.

Pak p je tvaru $p(x)=a_nx^n+\dots+a_1x+a_0$. Vezmeme $q_0,\dots,q_n\in\mathbb{Q}$, aby $|q_i-a_i|<\frac{\varepsilon}{2(n+1)}$, $i=0,\dots,n$.

Položme $q(x)=q_nx^n+\dots+q_1x+q_0$.

Pak $q\in D$, a platí $\|p-q\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|(a_n-q_n)x^n+\dots+(a_1-q_1)x+(a_0-q_0)|\le$

$$\le\sup_{x\in[0,1]}\underbrace{|a_n-q_n|}_{<\frac{\varepsilon}{2(n+1)}}\cdot\underbrace{|x^n|}_{\le 1}+\dots+\underbrace{|a_1-q_1|}_{<\frac{\varepsilon}{2(n+1)}}\cdot\underbrace{|x|}_{\le 1}+\underbrace{|a_0-q_0|}_{<\frac{\varepsilon}{2(n+1)}}<(n+1)\frac{\varepsilon}{2(n+1)}\cdot 1=\frac{\varepsilon}{2}$$

Potom tedy $\|f-q\|_\infty\le\|f-p\|_\infty+\|p-q\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$. Tedy D je hustá v $C([0,1])$.

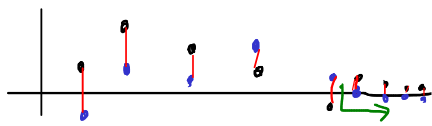
Navíc D je spočetná, protože $\varphi: D\longrightarrow\mathbb{Q}^{<\omega}$ ← konečné posloupnosti prvků $\mathbb{Q}$. je bijekce

$q_nx^n+\dots+q_1x+q_0\longmapsto(q_0,\dots,q_n)$

a $\mathbb{Q}^{<\omega}$ je spočetná, protože $\mathbb{Q}^{<\omega}=\underbrace{\mathbb{Q}^0}_{\text{spoč.}}\cup\underbrace{\mathbb{Q}^1}_{\text{spoč.}}\cup\underbrace{\mathbb{Q}^2}_{\text{spoč.}}\cup\dots$ je spočetné sjednocení spočetných množin.

Tedy $C([0,1])$ je separabilní.

(c) $\ell^1=\{a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}:\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty\}$, $\|a\|_1=\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ je norma na ℓ^1.



ℓ^1 je separabilní.

<u>Dk:</u> Položme: $c_{00}=\{a\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}: a_n\neq 0$ jen pro konečně mnoho $n\in\mathbb{N}\}$

$D=\{a\in\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}:$ ______ // ______ $\}$

Vezměme $a\in\ell^1$, $\varepsilon>0$. Jelikož $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ konverguje, najdeme $n_0\in\mathbb{N}$ t.ž. $\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$.

Pak vezmeme $b\in c_{00}$, $b_n=\begin{cases}a_n, & n\le n_0\\ 0, & n>n_0\end{cases}$. Pak $\|a-b\|_1=\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|a_n|<\frac{\varepsilon}{2}$

Dále nalezneme $c \in D$, t.ž. $|c_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{n_0}$, $n \le n_0$, $c_n = 0$, $n > n_0$.

Pak $\|b-c\|_1 = \sum_{n=1}^{n_0} |b_n - c_n| < n_0 \cdot \frac{\varepsilon}{n_0} = \varepsilon$. Tedy celkem $\|a-c\|_1 \le \|a-b\|_1 + \|b-c\|_1 < \varepsilon$.

Tedy D je hustá v ℓ^1. D je spočetná ze stejného důvodu jako v (b).

Tedy ℓ^1 je separabilní.

<u>Tvrzení</u> (X,ρ) obsahuje nespočetný systém disjunktních koulí $\Rightarrow X$ není separabilní.

<u>Dk:</u> Ať $\mathcal{G} = \{B(x_i, r_i) : x_i \in X, r_i > 0, i \in I\}$ (nespočetná) je disjunktní systém. Vezmeme $S \subset X$ spočetnou. Pak každé $s \in S$ je nejvýše v jedné kouli z $\mathcal{G}$. Takže $\exists i_0 \in I$, $B(x_{i_0}, r_{i_0}) \cap S = \emptyset$. Tedy každá posloupnost $(s_j)_{j=1}^{\infty} \subset S$ ($S \subset X$ libovolná spoč.) splňuje $\rho(s_j, x_{i_0}) \ge r_{i_0}$, tedy $s_j \not\to x_{i_0}$, tedy S není hustá v X. $\Rightarrow X$ není separabilní.

(d) $\ell^\infty = \{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (a_n)_{n=1}^{\infty}$ je omezená$\}$, $\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty$ je norma na ℓ^∞.

ℓ^∞ není separabilní:

<u>Dk:</u> Pro $M \subset \mathbb{N}$ položme $a^M \in \ell^\infty$, $a^M_n = \begin{cases} 1, & n \in M \\ 0, & n \notin M. \end{cases}$ Pak pro $M, N \subset \mathbb{N}$, $M \ne N$

máme $\|a^M - a^N\|_\infty = 1$. Tedy systém $\mathcal{G} = \{B(a^M, \frac{1}{2}) : M \subset \mathbb{N}\}$ je disjunktní

a nespočetný (protože $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ je nespočetný). $\Rightarrow \ell^\infty$ není separabilní.

(e) $c_0 = \{a \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} a_n = 0\} \subset \ell^\infty$, $\|a\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ je norma na c_0.

[$\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \cap c_0 = \{a \in \mathbb{Q}^n : \lim_{n\to\infty} a_n = 0\}$ je hustá, není spočetná, protože $\{a^M : M \subset \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \cap c_0$ je nespočetná
$a^M_n = \begin{cases} \frac{1}{n}, & n \in M \\ 0, & n \notin M \end{cases}$]

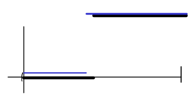
$D = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \cap c_{00}$ je spočetná hustá (podobně jako pro ℓ^1 – zkuste sami)

(f) $L^1([0,1])$ je separabilní.

<u>Náznak důkazu</u> Z teorie míry a integrálu víme, že $L^1[0,1]$ funkce lze aproximovat funkcemi tvaru $s = \sum_{i=1}^{m} q_i \chi_{A_i}$, kde $q_i \in \mathbb{Q}$ a $A_i \subset [0,1]$ jsou měřitelné.

Dále lze např. ukázat, že A_i mohou být voleny ve tvaru konečného sjednocení intervalů s racionálními konci, pak takových funkcí s je jen spočetně.

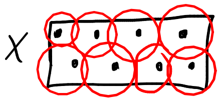
(g) $L^\infty([0,1])$



$\|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{[0,1]} |f|$

Pro $t \in [0,1]$ uvažme $f_t(x) = \chi_{[0,t]}(x) = \begin{cases} 0, & x \in (t,1] \\ 1, & x \in [0,t] \end{cases}$. Pak pro $t, s \in [0,1]$, $t \ne s$

máme $\|f_t - f_s\|_\infty = 1$, $\{f_t : t \in [0,1]\}$ je nespočetný, systém $\mathcal{G} = \{B(f_t, \frac{1}{2}) : t \in [0,1]\}$ je disjunktní $\Rightarrow L^\infty[0,1]$ není sep.



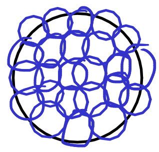
(X,ρ) je <u>totálně omezený</u>, pokud $\forall \varepsilon>0\ \exists K\subset X$ konečná, $\bigcup_{k\in K} B(k,\varepsilon)=X$.
(K se nazývá ε-síť)

$\boxed{2}$ Uzavřená jednotková koule v ℓ^1 je uzavřená, omezená, ale není totálně omezená
($\Rightarrow$ není kompaktní)

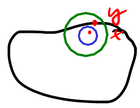
<u>Důkaz</u> Vezmeme $E=\{e^1,e^2,\dots\}$, $e^n=(0,\dots,0,1,0,\dots)$ ← n-tá pozice

Pak $\|e^n-e^m\|_1=2$ pro $m\neq n$.

Tedy pokud vezmeme konečnou množinu $K\subset\overline{B}(0,1)$, $K=\{k_1,\dots,k_n\}$,
pak každá koule $B(k_j,\frac{1}{2})$ obsahuje nejvýše jeden vektor z E.
Tedy $\bigcup_{j=1}^{n} B(k_j,\frac{1}{2})\not\supset E$, proto K není $\frac{1}{2}$-síť pro $\overline{B}(0,1)$.
K byla libovolná konečná $\Rightarrow \overline{B}(0,1)$ není totálně omezená. $\square$

<u>Pozn.</u> v $\mathbb{R}^n$  koule lze pokrýt konečně mnoha ε-koulemi
(pro libovolně malé ε) v $\mathbb{R}^n$ omezenost $\Leftrightarrow$ tot. omezenost.

$\boxed{3}$ $M\subset X$ je totálně omezená $\Rightarrow \overline{M}$ je totálně omezená

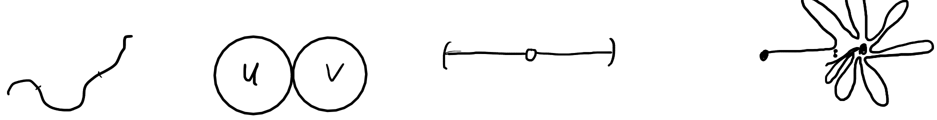


<u>Důkaz</u> Buď $\varepsilon>0$. M tot. omezená $\Rightarrow$ vezmeme $K\subset M$, K konečná $\frac{\varepsilon}{2}$-síť pro M.

Chceme ukázat K je ε-síť pro $\overline{M}$. Vezmeme si $y\in\overline{M}$. Najdeme $x\in M$, $\rho(x,y)<\frac{\varepsilon}{2}$.
Pro x existuje $z\in K$, $\rho(x,z)<\frac{\varepsilon}{2}$. Pak $\rho(z,y)\leq\rho(z,x)+\rho(x,y)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.
Tedy K je ε-síť pro $\overline{M}$. $\varepsilon>0$ libovolné $\Rightarrow \overline{M}$ je totálně omezená $\square$

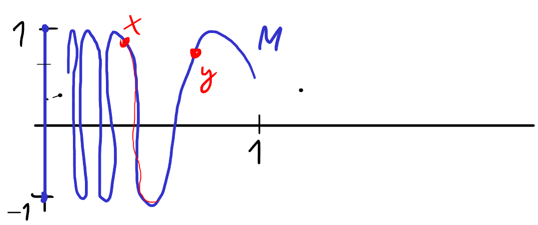
(X,ρ) je <u>souvislý</u>, pokud $\nexists\, U,V\subset X$ otevřené, $U\cap V=\emptyset$, $U\cup V=X$

(X,ρ) je <u>křivkově souvislý</u>, pokud $\forall x,y\in X\ \exists \varphi:[0,1]\to X$ spojité, $\varphi(0)=x$, $\varphi(1)=y$.



křivkově souvislý $\Rightarrow$ souvislý
$\not\Leftarrow$

$\boxed{4}$ $\underbrace{\{(x,\sin\frac{1}{x}):x\in(0,1]\}}_{A}\cup\{0\}\times[-1,1]=M$ je souvislá.



Důkaz i) A je souvislá: Ukážeme, že A je dokonce křivkově souvislá.

Vezmeme $x = (x_1, \sin\frac{1}{x_1})$, $y = (y_1, \sin\frac{1}{y_1}) \in A$.

Pak definujeme $\varphi: [0,1] \to A$, $\varphi(t) = \left(t y_1 + (1-t)x_1, \sin\frac{1}{t y_1 + (1-t)x_1}\right)$

Pak φ je spojitá (díky spojitosti $\sin(\frac{1}{\cdot})$ na $(0,1]$), $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$

$\Rightarrow A$ je křivkově souvislá

ii) $\overline{A} \supset M$: Pokud to dokážeme, jsme hotovi (díky větě z přednášky).

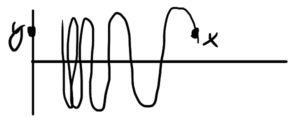
Vezměme $(0,s) \in M \setminus A$, (tzn. $s \in [-1,1]$). Pak uvažujme posloupnost

$x_n = \frac{1}{\arcsin s + 2n\pi}$. Pak $\underbrace{(x_n, \sin\frac{1}{x_n})}_{\in A} = \left(\frac{1}{\arcsin s + 2n\pi}, s\right) \xrightarrow{n\to\infty} (0,s)$

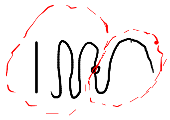
$\Rightarrow (0,s) \in \overline{A}$.

$\Rightarrow M$ je souvislá (protože $A \subset M \subset \overline{A}$ a M je souvislá) $\square$

M není křivkově souvislá.



Důkaz (Náznak) Vezměme $x = (1, \sin 1)$
$y = (0, 1)$, předpokládejme pro spor, že máme $\varphi: [0,1] \to M$, $\varphi(0) = x$, $\varphi(1) = y$ spojitou.

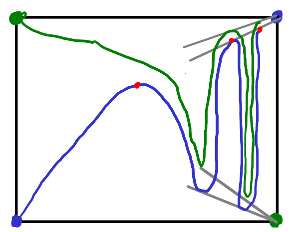
Pak $\varphi([0,1]) \supset A$, protože kdyby ne: .

Dále $\exists m \in [0,1] = \inf_{t\in[0,1]}\{t : \varphi(t) > 0\}$. Pak neexistuje $\lim_{t\to m^-} \varphi(t)$, protože

nutně existují $t_i \nearrow m$, t.ž. $\sin(\frac{1}{t_i}) = 1$ a zároveň nutně $\varphi(t_i)_1 \to 0$
$s_i \nearrow m$ $\sin(\frac{1}{s_i}) = -1$ $\varphi(s_i)_2 \to 0$,

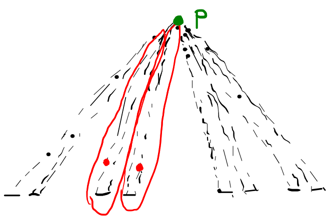
, tedy $\varphi(t_i) \to (0,1)$
$\varphi(s_i) \to (0,-1)$, tedy neexistuje limita
$\Rightarrow \varphi$ není spojitá

$\boxed{5}$



Najděte $A, B \subset [0,1]^2$ souvislé, disjunktní,
$A \ni (0,0)$, $A \ni (1,1)$, $B \ni (1,0)$, $B \ni (0,1)$.

$\boxed{6}$



$A \subset \mathbb{R}^2$ souvislá, $A \setminus \{P\}$ je totálně nesouvislá
(tzn. souvislé podmnožiny jsou jednobodové)

Cantor leaky tent.

$\boxed{7}$ (a) $\mathbb{R}^m$, $\quad x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x \iff x_{n,i} \to x_i \quad i = 1, \dots, m$

(b) $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\quad x_n \xrightarrow{\rho} x \iff x_{n,i} \to x_i \;,\; i \in \mathbb{N}$

ANO: $\rho(a,b) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\min(|a_i - b_i|, 1)}{2^i}$, nelze generovat normou

(c) $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $\quad f_n \xrightarrow{\rho} f \iff f_n \to f$ na $\mathbb{R}$ (bodově)

Taková metrika ρ neexistuje.

(d) $\mathcal{C}([0,1])$: $\quad f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f \iff f_n \rightrightarrows f$ na $[0,1]$.

(e) $\mathcal{C}(\mathbb{R})$: $\quad f_n \xrightarrow{\rho} f \iff f_n \overset{loc}{\rightrightarrows} f$ na $\mathbb{R}$

$$\rho(f,g) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\min(\|f-g\|_{\mathcal{C}([-i,i])}, 1)}{2^i}$$