FOURIEROVY ŘADY

Po 2π-periodickém dodefinování rozviňte funkci f do Fourierovy řady na $\mathbb{R}$. Rozhodněte, zda řada konverguje (popř. stejnoměrně) na $\mathbb{R}$ a pokud ano, určete její součet. Pomocí této řady pak určete součty zadaných číselných řad.

1. $f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad x \in (-\pi, \pi),$

2. $f(x) = \pi^2 - x^2, \quad x \in (-\pi, \pi),$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

3. (a) použijte sinovou[1] řadu (b) použijte konsinovou[2] řadu

$f(x) = x, \quad x \in (0, \pi),$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

4. $f(x) = e^x, \quad x \in (-\pi, \pi),$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$

5. Pro dané $k \in \mathbb{N}$ (resp. $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$)

(a) $f(x) = \sin kx, \quad x \in (-\pi, \pi]$ (b) $f(x) = \cos kx, \quad x \in (-\pi, \pi]$

6. $f(x) = \sin 3x + 4x, \quad x \in (-\pi, \pi],$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n}$

7. Zde použijte kosinovou řadu: $f(x) = \sin x, \quad x \in [0, \pi),$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{4k^2 - 1}$

8. $f(x) = \cos ax, \quad x \in [0, \pi],$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 - 4}$

9. Zde použijte kosinovou řadu: $f(x) = \operatorname{sign}(\sin 3x), \quad x \in [0, \pi],$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(3k+1)(3k+2)}$$

[1] tzn. Fourierovu řadu obsahující pouze členy s $\sin nx$.

[2] analogicky, pouze členy s $\cos nx$.

VÝSLEDKY

1. $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$

2. $\dfrac{2}{3}\pi^2+4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx,\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{\pi^2}{12},\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

3.

4. $\dfrac{\sinh\pi}{\pi}+\dfrac{2\sinh\pi}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}(\cos nx-n\sin nx),\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{\sinh\pi}-1\right).$

5. (a) $\sin kx$

(b) $\cos kx$

6. $\sin 3x+8\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin nx,\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n}=\frac{1}{2}$

7. $\dfrac{2}{\pi}-\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx,\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

8. $\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1,n\neq a}^{\infty}\frac{n}{a^2-n^2}\left[(-1)^n\cos(a\pi)-1\right]\sin nx,\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2-4}=-\frac{\pi}{4}$

9. $\dfrac{1}{3}+\dfrac{4\sqrt{3}}{\pi}\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{6k+2}\cos(6k+2)x-\frac{1}{6k+4}\cos(6k+4)x\right),$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(3k+1)(3k+2)}=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$