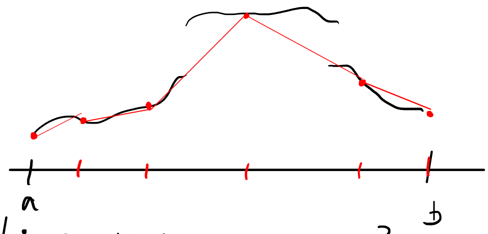
Absolutně spojité funkce a funkce s konečnou variací

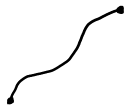
variace funkce:



$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$V_a^b(f)=\sup\left\{\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})| : a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\right\}$

$\boxed{1}$ $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monotónní, $V_a^b(f)=?$

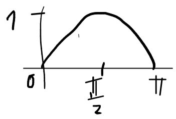


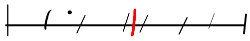
Buď $a=x_0<\dots<x_n=b$. BÚNO f je neklesající (jinak $-f$).

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n f(x_i)-f(x_{i-1}) = f(x_n)-f(x_0) = f(b)-f(a)$$

Dělení bylo libovolné $\Rightarrow V_a^b(f)=f(b)-f(a)$.

$\boxed{2}$ $V_0^\pi(\sin)=?$



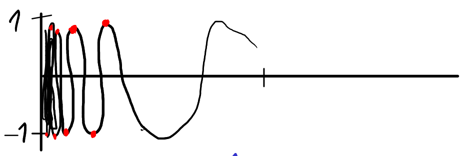


Vezmeme dělení $0=x_0<\dots<x_n=\pi$, přidáme do něj bod $\frac{\pi}{2}$, pokud tam nebyl: $\underset{x_0}{y_0}<\underset{x_1}{y_1}<\dots<\underset{x_m}{y_m}\le \underset{\frac{\pi}{2}}{y_{m+1}}<\underset{x_{m+1}}{y_{m+2}}<\dots<\underset{x_n}{y_{n+1}}$

$$\sum_{i=1}^n |\sin(x_i)-\sin(x_{i-1})| \le \sum_{i=1}^{n+1}|\sin(y_i)-\sin(y_{i-1})| = \sum_{i=1}^{m+1}\sin(y_i)-\sin(y_{i-1}) + \sum_{i=m+2}^{n+1}-(\sin(y_i)-\sin(y_{i-1})) =$$

$$= \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 - \left(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

$\boxed{3}$ $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$, $V_0^\pi(f)=?$



Zvolme dělení $x_{-1}=0$, $x_0=\frac{1}{\pi(\frac12+n)}$, $x_1=\frac{1}{\pi(\frac12+(n-1))}$, $\dots$, $x_n=\frac{1}{\frac12\pi}$, $x_{n+1}=\pi$

$$V_a^b(f)\ge\sum_{i=1}^n|f(x_i)-f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left|\sin\left(\pi\left(\tfrac12+i\right)\right)-\sin\left(\pi\left(\tfrac12+i-1\right)\right)\right|}_{2} = 2n.$$

Tedy $V_a^b(f)=\infty$.

$\boxed{4}$ Nalezněte ~~$f\in BV([a,b])$~~ neklesající, t.ž. $\int_a^b f' < f(b)-f(a)$

[Z přednášky víme, že f ~~$\in BV([a,b])$~~ neklesající $\Rightarrow \exists f'$ s.v. v $[a,b]$, $\int_a^b f'\le f(b)-f(a)$]

$f(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,\frac12]\\ 1, & x\in(\frac12,1]\end{cases}$.

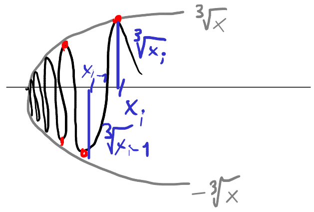
Pak • f ~~$\in BV([0,1])$, protože~~ je ~~monotónní~~ neklesající

• $f'(x)=0$, $x\in(0,1)\setminus\{\frac12\}$.

Tedy, $\int_0^1 f'(x)\,dx=\int_0^1 0\,dx = 0 < 1 = f(1)-f(0)$.

Poznámka: dokonce lze najít i f spojitou, viz $\boxed{10}$

$\boxed{5}$ $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}\,\sin\frac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0, \end{cases}$



Vezmeme stejné dělení jako v $\boxed{3}$, tzn. $x_i = \frac{1}{\pi(\frac{1}{2}+i)}$, $i=0,\dots,n$.

$$V_0^\pi(f) \ge \sum_{i=1}^n |f(x_i)-f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \sqrt[3]{x_i} + \sqrt[3]{x_{i-1}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt[3]{\pi(\frac12+i)}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\pi(\frac12+(i-1))}}$$

Platí to pro všechna $n \Rightarrow$ $V_0^\pi(f) \ge \sum_{i=1}^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{\pi(\frac12+i)}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\pi(\frac12+i-1)}} = \infty$. $f \notin BV([0,\pi])$, přestože f je spojitá $[0,\pi]$.

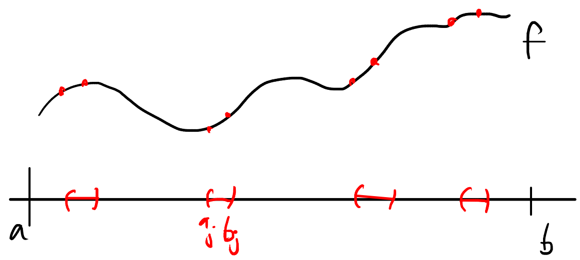
$\boxed{6}$ $f\in BV([a,b]) \Rightarrow f$ má jednostranné limity ve všech bodech $[a,b]$.

Dk: Víme, že $f=g-h$, kde g,h jsou monotonní, g,h mají jednostranné limity $\Rightarrow f=g-h$ má jednostranné limity (z věty o aritmetice limit)

$\boxed{7}$ $f\in BV([a,b]) \Rightarrow f$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.

Dk: $f=g-h$, g,h jsou monotonní, pro g,h to platí.

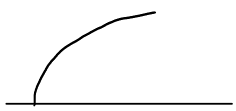
absolutní spojitost:



$$f\in AC([a,b]) \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ a\le a_1<b_1\le a_2<b_2<\dots\le a_n<b_n\le b,\ \sum_{j=1}^n b_j-a_j<\delta \Rightarrow \sum_{j=1}^n |f(b_j)-f(a_j)|<\varepsilon.$$

Víme: Pro $f\in AC([a,b])$: $\int_x^y f' = f(y)-f(x)$, $a\le x<y\le b$.

$\boxed{8}$ $f(x)=\sqrt{x}$, $f\in AC([0,1])$:



Zvolme $\varepsilon>0$, a dělení $a\le a_1<b_1<\dots\le a_n<b_n\le b$, $\sum_{j=1}^n b_j-a_j<\delta:=\varepsilon^2$.

Podíváme se na $[0,c]$, a $[c,1]$, kde $\frac{\varepsilon^2}{4}$. a předpokládáme, že c neleží v žádném (a_j,b_j)

$\Rightarrow b_m\le c\le a_{m+1}$ (jinak ho rozdělím).

$$\sum_{j=1}^m |\sqrt{b_j}-\sqrt{a_j}| \overset{\sqrt{\ }\text{ je monotonní}}{\le} \sqrt{c} = \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sum_{j=m+1}^n |\sqrt{b_j}-\sqrt{a_j}| \le \sum_{j=m+1}^n \frac{b_j-a_j}{\sqrt{b_j}+\sqrt{a_j}} \le \sum_{j=m+1}^n \frac{b_j-a_j}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{c}}\varepsilon^2 = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^n |\sqrt{b_j}-\sqrt{a_j}| < \frac{3}{2}\varepsilon \Rightarrow f\in AC([0,1])$$

$\boxed{9}$ f Lipschitzovská $\overset{(1)}{\Longrightarrow}$ f je AC $\overset{(2)}{\Longrightarrow}$ f je stejnoměrně spojitá (na $[a,b]$)

$\not\Longleftarrow$ $\boxed{8}$ $\not\Longleftarrow$ $\boxed{5}$

(1) f Lipsch. $\Rightarrow \exists L>0 : \forall x,y \in [a,b] : |f(x)-f(y)| \le L|x-y|$

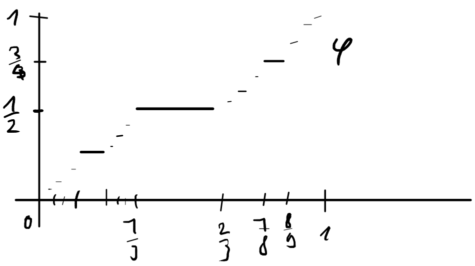
Zvolme $\varepsilon>0$,

Pak pro $a \le a_1 < b_1 \le \dots \le a_n < b_n \le b$: $\sum_{j=1}^{n} |f(b_j)-f(a_j)| \le \sum_{j=1}^{n} L|b_j-a_j| = L \cdot \sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j) < \varepsilon$.

$\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j) < \frac{\varepsilon}{L}$

(2) f AC $\Rightarrow \forall \varepsilon>0 \, \exists \delta>0 : (b_1-a_1)<\delta \Rightarrow |f(b_1)-f(a_1)|<\varepsilon \Rightarrow$ f stejnoměrně spojitá.

(10) Cantorova funkce φ



Pak φ je spojitá a monotonní na $[0,1]$

φ je lokálně konstantní na $[0,1]\setminus \mathcal{C}$, kde $\mathcal{C} = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \; a_i \in \{0,2\} \right\}$, které splňuje $\lambda^1(\mathcal{C})=0$

$\Rightarrow \varphi'=0$ na $[0,1]\setminus\mathcal{C}$.

$\Rightarrow \varphi'=0$ s.v. v $[0,1]$.

$\Rightarrow \int_0^1 \varphi' = \int_0^1 0 = 0 < 1 = \varphi(1)-\varphi(0)$.

$\Rightarrow \varphi \notin AC([0,1])$.

$\boxed{11}$ $f \in AC([a,b])$, $|f'| \le K \Rightarrow$ f Lipschitzovská na $[a,b]$.

Dk: $x,y \in [a,b]$, $x<y$ $\quad |f(x)-f(y)| = \left|\int_x^y f'\right| \le \int_x^y |f'| \le \int_x^y K = K(y-x) \Rightarrow$ f Lipsch. s konstantou K.

$\boxed{12}$ $\int_{-1}^{1} |x|e^x \, dx = [|x|e^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \operatorname{sgn} x \cdot e^x dx = \dots$

Per partes pro AC funkce

$f(x)=e^x$, $f'(x)=e^x$, $x\in(-1,1)$ $\quad \mathcal{C}^1 \Rightarrow$ Lipsch. $\Rightarrow AC$

$g(x)=|x|$, $g'(x)=\operatorname{sgn} x$, $x \in (-1,1)\setminus\{0\}$ $\quad$ Lipsch $\Rightarrow AC$.

nevadí, stačí skoro všude