METRICKÉ PROSTORY II.

Uvažujme normovaný lineární prostor $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$,

kde $\ell_2 = \left\{ (x_n)_{n=1}^{\infty} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty \right\}, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2}.$

1. Uzavřená jednotková koule není kompaktní v ℓ_2. (srovnejte s $\mathbb{R}^n$)

2. Ukažte, že v ℓ_2 obecně neplatí $\lim_{N\to\infty} (x_{i,N})_{i=1}^{\infty} = \left(\lim_{N\to\infty} x_{i,N}\right)_{i=1}^{\infty}$, pokud existuje limita vpravo. (tzn. "konvergence po složkách" se neshoduje s konvergencí v ℓ_2, srovnejte s $\mathbb{R}^n$)

3. O množinách $A, B \subset X$ v metrickém prostoru (X, ρ) řekneme, že *jejich vzdálenost je realizována*, pokud existují $a \in A, b \in B$ splňující $\rho(a, b) = \rho(A, B)$.[1]

(a) Nalezněte uzavřené množiny $F, H \subset \mathbb{R}^n$ splňující $\rho(F, H) = 0$, jejichž vzdálenost není realizována.

(b) V ℓ_2 nalezněte kompaktní množinu $K \subset \ell_2$ a uzavřenou množinu $F \subset \ell_2$, jejichž vzdálenost není realizována.

(c) Dokažte, že vzdálenost dvou kompaktních množin (v libovolném metrickém prostoru) je vždy realizována.

(d) Ukažte, že úlohu (b) nelze řešit v $\mathbb{R}^n$.

(e) Ukažte, že množiny v (b) nemohou splňovat $\rho(K, F) = 0$.

4. Prostor $\mathcal{C}([0, 1])$ s integrální metrikou není úplný.

5. Buď (K, ρ) kompaktní metrický prostor, dokažte že existují $x, y \in K$, $\rho(x, y) = \operatorname{diam} K$.

6. Buď (K, ρ) kompaktní metrický prostor a $f\colon K \to K$ je zobrazení splňující

$$\forall x, y \in K, x \neq y : \rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y).$$

(a) Dokažte, že f má pevný bod (tzn. $\exists x^* \in K : f(x^*) = x^*$).

(b) Pokud místo K uvažujeme pouze úplný prostor X, závěr v (a) neplatí. (srovnejte s Banachovou větou o kontrakci)

---

[1] Definujeme $\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}$