

METRICKÉ PROSTORY I.

1. Určete vnitřek, uzávěr a hranici množin v \mathbb{R} . Dále rozhodněte, jestli jsou množiny otevřené resp. uzavřené.

(a) \mathbb{N}

(d) \emptyset

(b) \mathbb{Q}

(e) \mathbb{R}

(c) $[0, 1)$

(f) $M = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

2. Rozhodněte, zda následující funkce jsou metrikami na \mathbb{R} .

(a) $\rho(x, y) = x - y$

(c) $\rho(x, y) = |x^2 - y^2|$

(b) $\rho(x, y) = |x^3 - y^3|$

(d) $\rho(x, y) = (x - y)^2$

3. Rozhodněte, zda následující množiny jsou otevřené resp. uzavřené v \mathbb{R}^n .

(a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + 2y^2 < 1\}$

(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \leq 0\}$

(c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y \leq 0\}$

(d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^3 + y^2 + e^x = 5\}$

(e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y = 2, z \geq 0\}$

4. Nalezněte spojitou funkci $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, pro kterou $f^{-1}([0, \infty)) \neq \overline{f^{-1}((0, \infty))}$.

5. Ukažte, že funkce $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin(xyz)$ je spojitá na \mathbb{R}^3 .

6. Dokažte, že množina $A \subset \mathbb{R}$ je otevřená, právě když je sjednocením spočetně mnoha disjunktních otevřených intervalů.

7. Najděte metrický prostor (X, ρ) a uzavřené množiny $F, H \subset X$ takové, že $\text{dist}(F, H) = \inf\{\rho(x, y) : x \in F, y \in H\} = 0$, ale $F \cap H = \emptyset$.

8. Mějme posloupnost funkcí $f_n \in \mathcal{C}([0, 1])$, $f_n(x) = x^n$. Ukažte, že

(a) v metrice $\rho_1(f, g) = \|f - g\|_1 = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ platí $f_n \xrightarrow{\rho_1} 0$.
(zde $0 \in \mathcal{C}([0, 1])$ značí konstantní nulovou funkci na $[0, 1]$)

(b) v metrice $\rho_\infty(f, g) = \|f - g\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - g(x)|$ nemá posloupnost $(f_n)_{n=1}^\infty$ limitu.

V úlohách 9.–11. budeme na prostoru $\mathcal{C}([0, 1])$ uvažovat supremovou metriku ρ_∞ .

9. Ukažte, že funkce $I: \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem $I(f) = \int_0^1 f(x) dx$ je spojitá.
10. Nechť $a \in [0, 1]$. Ukažte, že funkce $F_a: \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ definovaná předpisem $F_a(f) = f(a)$ je spojitá.
11. Rozhodněte, jestli množiny jsou otevřené resp. uzavřené v $\mathcal{C}([0, 1])$.
- (a) $\{f \in \mathcal{C}([0, 1]) : 0 < \int_0^1 f(x) dx < 1\}$
- (b) $\{f \in \mathcal{C}([0, 1]) : \int_0^1 f(x) dx \geq 0, f(1) = 1\}$

VÝSLEDKY

1. (a) \mathbb{N} je uzavřená, $\text{int } \mathbb{N} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$, $\partial\mathbb{N} = \mathbb{N}$
 (b) \mathbb{Q} není otevřená ani uzavřená, $\text{int } \mathbb{Q} = \emptyset$, $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$
 (c) $[0, 1)$ není otevřená ani uzavřená, $\text{int}[0, 1) = (0, 1)$, $\overline{[0, 1)} = [0, 1]$,
 $\partial[0, 1) = \{0, 1\}$
 (d) \emptyset je otevřená i uzavřená, $\text{int } \emptyset = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = \emptyset$, $\partial\emptyset = \emptyset$
 (e) \mathbb{R} je otevřená i uzavřená, $\text{int } \mathbb{R} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, $\partial\mathbb{R} = \emptyset$
 (f) M není otevřená ani uzavřená, $\text{int } M = \emptyset$, $\overline{M} = M \cup \{0\}$, $\partial M = M \cup \{0\}$
2. (a) ne (b) ano (c) ne (d) ne
3. (a) otevřená (b) uzavřená (c) ani jedno (d) uzavřená (e) uzavřená
4. Např. $f(x) = \max(x, 0)$.
7. Např. $X = \mathbb{R}$, $F = \mathbb{N}$, $H = \{n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$.
11. (a) otevřená (b) uzavřená