DERIVACE FUNKCÍ VÍCE PROMĚNNÝCH

Spočtěte parciální derivace funkcí všude, kde existují.

1. $f(x,y) = x^m y^n$, kde $m,n \in \mathbb{N}$

2. $f(x,y) = e^{xy}$

3. $f(x,y,z) = xy + yz + zx$

4. $f(x,y) = |x| \cdot |y|$

5. $f(x,y,z) = \left(\frac{x}{y}\right)^z$

6. $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$

7. $f(x,y) = \sqrt{x + y^2}$

Rozhodněte, zda funkce f má totální diferenciál v bodě $(0,0)$ a pokud ano, spočtěte jej. (Pokud funkce není v $(0,0)$ definována, spojitě ji dodefinujte, pokud to lze.)

8. $f(x,y) = x^2 y^3$

9. $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2}$

10. $f(x,y) = \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

11. $f(x,y) = |xy|$

12. $f(x,y) = (x^2 + y^2) \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

13. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

14. $f(x,y) = e^{\frac{-1}{x^2+xy+y^2}}$

Spočtěte parciální derivace funkce h v bodě a.

15. $h(x_1,x_2) = g(f_1(x_1,x_2), f_2(x_1,x_2))$, $a = (1,0)$, kde
$f_1(x_1,x_2) = x_1 x_2$, $f_2(x_1,x_2) = 2x_1 + x_2$, $g(y_1,y_2) = y_1^2 y_2 + y_1 y_2^2 + e^{y_2}$.

16. $h(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$, $a = (1,0)$, kde
$u(x,y) = x\cos y - 1$, $v(x,y) = y \sin x$,
$f'(0,0)$ existuje a $\nabla f(0,0) = (2,7)$

17. $h(x,y) = g(x^2 - y^2, e^{xy}, \sin x + \cos y)$, $a = (0,0)$, kde
$g'(0,1,1)$ existuje a $\nabla g(0,1,1) = (3,-2,1)$.

18. $h(r,\phi) = g(f_1(r,\phi), f_2(r,\phi))$, $a = (r,\phi) \in \mathbb{R}^2$, kde
$f_1(r,\phi) = r\cos\phi$, $f_2(r,\phi) = r\sin\phi$, $g(x,y) = x^2 + y^2$

19. Mějme zobrazení $\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ taková, že

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = (x^2 + e^y + z, \sin x + z^2), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

derivace $\boldsymbol{g}'(1,0)$ existuje a je reprezentována maticí

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dokažte existenci derivace $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})'(0,0,0)$ a spočtěte její reprezentující matici.

20. Buď $\boldsymbol{f} = (f_1, f_2)\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ zobrazení definované předpisem

$$\boldsymbol{f}(x,y,z) = ((x+1)(y+1)^2(z+1)^3, \sin x \cos(y+2z)), \quad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zobrazení $\boldsymbol{g}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ má v bodě $(1,0)$ derivaci reprezentovanou maticí

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Dokažte existenci derivace $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})'(0,0,0)$ a spočtěte její reprezentující matici.

(b) Spočtěte $D_{(2,0,1)} f_1(0,0,0)$, tzn. derivaci funkce f_1 v bodě $(0,0,0)$ podle vektoru $(2,0,1)$.

VÝSLEDKY

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = mx^{m-1}y^n$, $\frac{\partial f}{\partial y} = nx^m y^{n-1}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

2. $\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}$ pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

3. $\frac{\partial f}{\partial x} = y+z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x+z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = x+y$ pro $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

4. $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = |y| \operatorname{sgn} x$ pro $x \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = |x| \operatorname{sgn} y$ pro $y \neq 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pro $y \neq 0$ a $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ pro $x \neq 0$ neexistují.

5. Pokud $x,y > 0$ nebo $x,y < 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{z}{y} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{zx}{y^2} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^{z} \cdot \log \frac{x}{y}$.

6. Pokud $x > 0$ a $z \neq 0$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{z} \cdot x^{\frac{y}{z}-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = x^{\frac{y}{z}} \cdot \log x \cdot \frac{1}{z}$; $\frac{\partial f}{\partial z} = -x^{\frac{y}{z}} \cdot \log x \cdot \frac{y}{z^2}$.

7. Pokud $x > -y^2$, pak $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+y^2}}$; $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x+y^2}}$. Jinak parciální derivace neexistují.

8. ano, $f'(0,0)(h) = 0$. (Pro $(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f'(x,y)(h) = 2xy^3h_1 + 3x^2y^2h_2$.)

9. ne

10. ano, $f'(0,0)(h) = 0$

11. ano, $f'(0,0)(h) = 0$

12. ano, $f'(0,0)(h) = 0$.

13. ne

14. ano

15. $\frac{\partial h}{\partial x_1}(1,0) = 2e^2$, $\frac{\partial h}{\partial x_2}(1,0) = 4 + e^2$

16. $\frac{\partial h}{\partial x}(1,0) = 2$, $\frac{\partial h}{\partial y}(1,0) = 7 \sin 1$

17. $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 1$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$

18. $\frac{\partial h}{\partial \phi}(r,\phi) = 0$, $\frac{\partial h}{\partial r}(r,\phi) = 2r$

19. $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})'(0,0,0)$ má reprezentující matici $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 3 \\ 6 & 5 & 5 \\ 8 & 7 & 7 \end{pmatrix}$.

20. (a) $(\boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f})'(0,0,0)$ má reprezentující matici $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) $D_{(2,0,1)} f_1(0,0,0) = 5$